Apsoloutna geometrija

Aksiome incidencije (pripadanja)

Postoji osam aksioma incidencije:

I_1 Za svake dvije tačke A i B postoji prava a koja je incidentna i sa tačkom A i sa tačkom B.

I_2 Za svake dvije tačke A i B postoji najviše jedna prava koja je incidentna sa svakom od tačaka A i B.

I_3 Za svaku pravu postoje bar dvije tačke koje su sa njom incidentne. Postoje bar tri tačke koje nisu incidentne sa istom pravom.

I_4 Za svake tri tačke A, B i C koje nisu incidentne sa istom pravom, postoji ravan koja je incidentna sa svkom od tačaka A, B, C.
Svakoj ravni je incidentna bar jedna tačka.

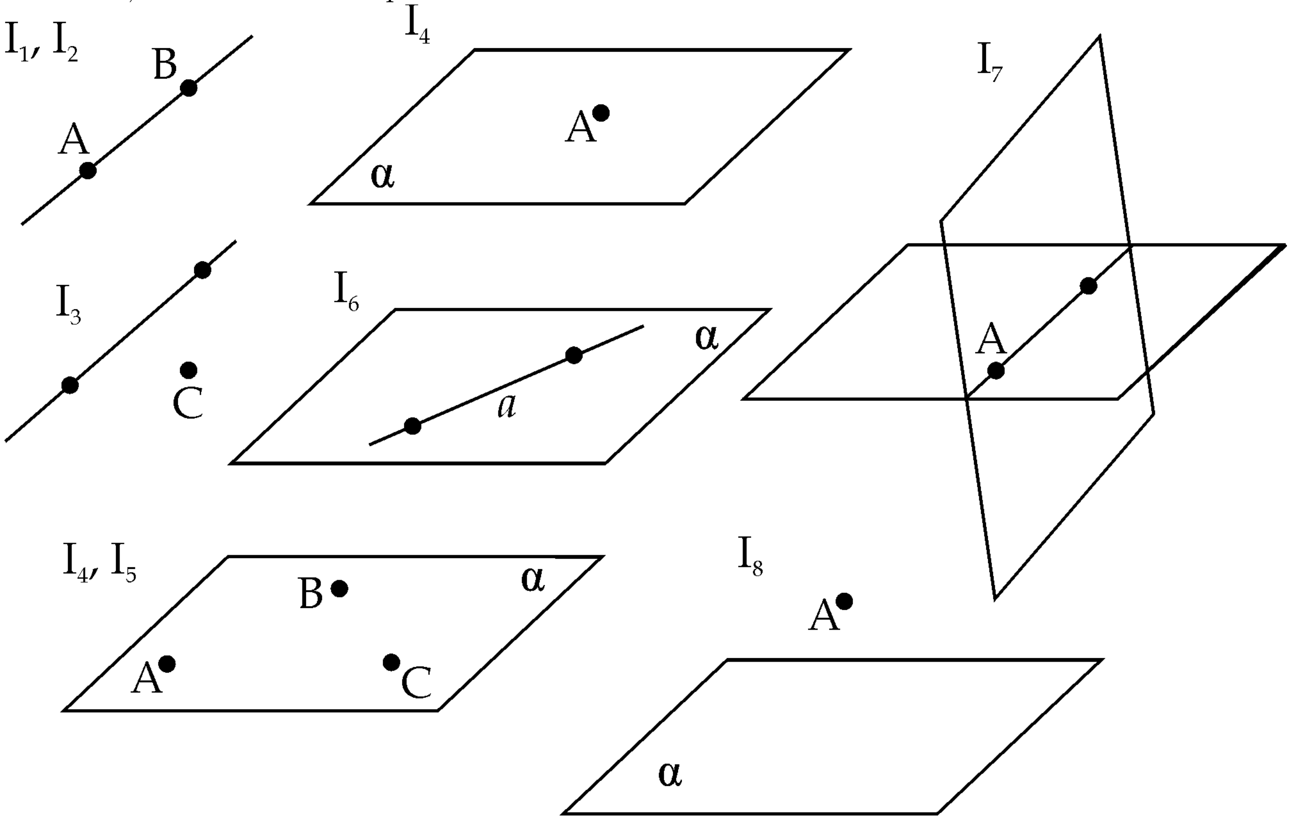
I_5 Za svake tri tačke A, B i C koje nisu incidentne sa istom pravom postoji najviše jedna ravan koja je incidentna sa svakom od tačaka A, B, C.

I_6 Ako su dvije tačke prave a incidentne sa ravni α, tada je svaka tačka prave a incidentne sa ravni α.

I_7 Ako postoji jedna tačka koja je incidentna i sa ravni α i sa ravni β, tada postoji bar još jedna tačka koja je incidentna i sa ravni α i sa ravni β.

I_8 Postoje bar četri tačke koje nisu incidentne sa istom ravni.

Skraćeno, aksiome možemo predstaviti slikama:



Pitanje: Kakva je razlika između aksioma I_1 i I_2?
Kakva je razlika između aksioma I_4 i I_5?

Urađeni zadaci

1. Dokazati da postoji jedna i samo jedna ravan koja sadrži datu pravu u tačku van nje.
2. Dokazati da postoji jedna i samo jedna ravan koja sadrži dvije date prave koje se sijeku.
3. Dokazati da presjek dvije različite prave može biti ili prazan skup ili tačka.
4. Dokazati da presjek dvije različite ravni može biti ili prazan skup ili prava.
5. Dokazati da za datu pravu a postoji prava b koja s njom nema zajedničkih tački.

   Napomena: Prave koje ne leže u jednoj ravni zovu se mimoilaznim pravama.
6. Dokazati da je svaka ravan incidentna sa najmanje tri tačke.
7. Dokazati da za svaku pravu a postoji prava b, takva da prave a i b ne pripadaju istoj ravni.

Aksiome poretka

Postoje četiri aksiome poretka:

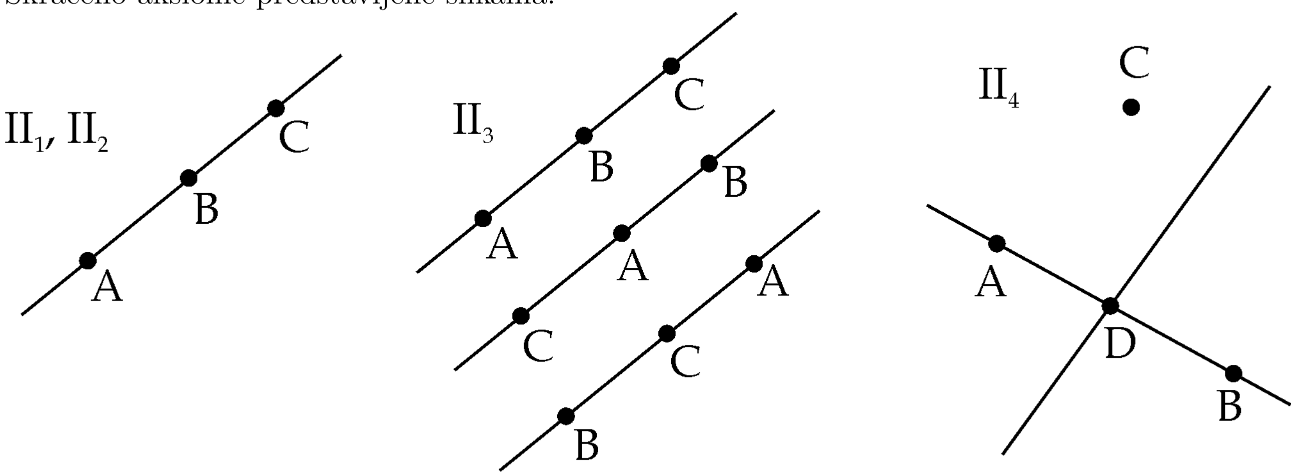
II_1 Ako je $A - B - C$ tada su A, B i C tri različite tačke jedne iste prave i takođe je $C - B - A$.

II_2 Za svake dvije tačke A i B postoji tačka C, takva da je $A - B - C$.

II_3 Ako su A, B i C tri tačke jedne prave, tada važi najviše jedna od relacija: $A - B - C$, $B - C - A$ ili $C - A - B$.

II_4 (Pašova aksioma) Neka su A, B, C tri nekolinearne tačke i neka je p prava koja je incidentna sa ravni ABC i nije incidentna ni sa jednom od tačaka A, B, C. Ako postoji tačka $D \in p$ takva da je $A - D - B$ tada postoji tačka $E \in p$ takva da važi bar jedna od relacija $B - E - C$ ili $C - E - A$.

Skraćeno aksiome predstavljene slikama:



Urađeni zadaci

8. Za svake dvije tačke A i B postoji tačka C takva da je $A - C - B$.
9. Date su četiri kolinearne tačke A, B, C, D. Dokazati da važe sljedeća dva tvrđenja:
   a) Ako je $A - B - D$ i $B - C - D$ tada je $A - B - C$;
   b) Ako je $A - B - D$ i $B - C - D$ tada je $A - C - D$.
10. Dokazati da svaka duž ima beskonačno mnogo tačaka.
11. (Pašova teorema) Prava p pripada ravni koja je određena nekolinearnim tačkama A, B, C i

ne sadrži nijednu od tih tačaka. Ako pri tom prava p siječe pravu $p(A,B)$ između tačaka A i B tada ona siječe ili pravu $p(B,C)$ između tačaka B i C ili pravu $p(A,C)$ između tačaka A i C.

12. Date su četiri kolinearne tačke A, B, C, D. Isključivo aksiomama incidencije i poretka dokazati da ako je $A-B-C$ i $A-C-D$ tada je $B-C-D$;

13. Neka je data poluravan α s ivicom u pravoj s i neka su date tačke $S \in s$ i $T \in \alpha$. Dokazati da je poluprava $pp[S,T) \subseteq \alpha$.

14. Prava koja pripada ravni nekog trougla i prolazi kroz jednu njegovu unutrašnju tačku ima sa tim trouglom tačno dvije zajedničke tačke. Dokazati.

15. Dat je ugao $\measuredangle aOb$ i tačka M unutar tog ugla. Dokazati da poluprava $pp[O,M)$ siječe svaku duž AB gdje je $A \in a$ i $B \in b$.

16. Isključivo aksiomama incidencije i poretka pokazati da je unutrašnjost trougla neprazan skup.

17. Neka se prave a i b sijeku u tački A i neka je $A-B-C$ na pravoj a, i $A-D-E$ na pravoj b. Isključivo aksiomama incidencije i poretka dokazati da se duž BE mora sijeći sa duži CD u tački M.

18. Dokazati da svaka tačke prave dijeli tu pravu na dvije koneksne figure (poluprave).

Konveksnost

Figura F je konveksna ako za svake dvije tačke A i B iz F slijedi $AB \subseteq F$. Prazan skup $\emptyset$ i figura koja se sastoji od samo jedne tačke su konveksne.

Najpoznatije konveksne figure su: prava, poluprava, ravan, polurava, krug, sfera, kocka, paralelogram...

Izlomljena poligonalna linija je unija uzastopnih nadovezanih duži od kojih nijedna od dvije susjedne nadovezane duži ne pripadaju istoj oblasti.

Mnogougao je unija zatvorene poligonalne lonije (čije se duži ne sijeku) i njene unutrašnje oblasti.

Urađeni zadaci

19. Dokazati da je presjek dvije konveksne figure konveksna figura.
20. Dokazati da je unutrašnja oblast ugla, različitog od ravnog konveksan skup, dok je spoljašnja oblast tog ugla nekonveksan skup.
21. Dokazati da je unutrašnja oblast trougla konveksan skup i da je spoljašnja oblast trougla nekonveksan skup.
22. Dokazati da je mnogougao konveksan ako i samo ako se svi vrhovi mnogougla nalaze u istoj poluravni određenoj pravom koja sadrži ma koju stranicu tog mnogougla.
23. Četverougao je konveksan ako i samo ako mu se dijagonale sijeku.
24. Dokazati da je četverougao konveksan ako i samo ako svaka duž MN pri čemu $M \in AB$, $N \in CD$ siječe njegove dijagonale.
25. Dokazati da je četverougao konveksan ako i samo ako svaki vrh četverougla leži u spoljašnjoj oblasti trougla kojeg obrazuju ostala tri vrha četverougla.
26. Date su četri konveksne fugure u ravni takve da svake tri od njih imaju jednu zajedničku tačku. Dokazati da sve četri date figure imaju zajedničku tačku.
27. Dokazati da prava ne može sijeći sve stranice mnogougla sa neparnim brojem stranica.

Problemi broj 2

Zadaci za vježbu

28. Dokazati da ravan i prava koja ne pripada toj ravni mogu da imaju najviše jednu zajedničku tačku.

29. Ako četri različite tačke ne pripadaju istoj ravni tada među njima ne postoje tri kolinearne. Dokazati.

30. Dokazati da za svaku ravan postoji prava koja joj ne pripada.

31. Neka su A, B, C i D četiri kolinearne tačke. Dokazati da važe sljedeća tvrđenja:
   a) Ako je $A-B-C$ i $B-C-D$ tada je $A-B-D$;
   b) Ako je $A-B-C$ i $B-C-D$ tada je $A-C-D$;

32. Neka su A, B, C i D četiri kolinearne tačke. Dokazati da ako je $A-B-C$ i $A-D-C$ tada je ili $A-D-B$ ili $B-D-C$.

33. Neka su A, B, C, D, M četiri kolinearne tačke i neka je $A-C-B$, $A-D-B$ i $C-M-D$. Dokazati da je $A-M-B$.

34. Neka su A, B, C i D kolinearne tačke. Dokazati da iz $\neg(B-A-C)$ i $\neg(B-A-D)$ slijedi $\neg(C-A-D)$.

35. Neka su A, B, C i D kolinearne tačke. Dokazati da iz $B-A-C$ i $B-A-D$ slijedi $\neg(C-A-D)$.

36. Ako prava siječe jednu stranicu mnogougla, tada ona ima bar još jednu zajedničku tačku sa tim mnogouglom. Dokazati.

37. U ravni je dato n duži ($n \geq 3$), tako da svake tri od njih imaju zajedničku tačku. Dokazati da postoji tačka zajednička za sve duži.

38. Dokazati da svaka tačka prave dijeli tu pravu na dvije konveksne figure (poluprave).

39. Dokazati da svaka prava dijeli ravan kojoj pripada na dvije konveksne figure (poluravni).

40. Dokazati da je presjek konačnog broja konveksnih figura konveksna figura. Da li je presjek beskonačno mnogo konveksnih figura konveksna figura? Da li je unija konačnog broja konveksnih figura konveksna figura? (Odgovore obrazložiti.)

41. Dokazati da dvije prave koje se sijeku dijele ravan u kojoj leže na četri konveksne figure.

42. Dokazati da svaka ravan dijeli prostor na dvije konveksne figure (poluprostora).

43. Dokazati da dvije ravni koje se sijeku dijele prostor na četiri konveksne oblasti.

44. Dokazati da diedar različit od ravnog dijeli prostor na dvije oblasti od kojih je jedna konveksna (unutrašnjost diedra), a druga nije (spoljašnjost diedra).

45. Dokazati da triedar dijeli prostor na dvije oblasti od kojih je jedna konveksna (unutrašnjost triedra), a druga nije (spoljašnjost triedra).

46. Dokazati da tetraedar dijeli prostor na dvije oblasti od kojih je jedna konveksna (unutrašnjost tetraedra), a druga nije (spoljašnjost tetraedra).

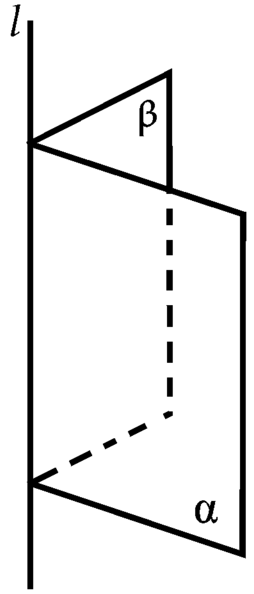
Napomena:

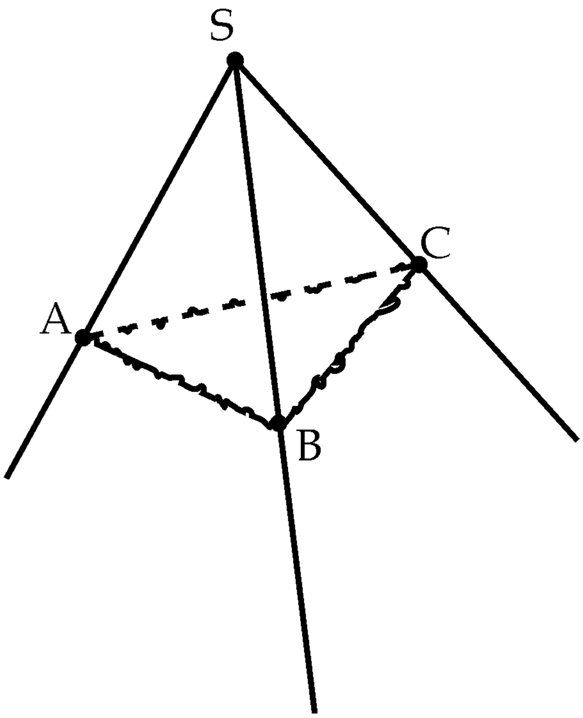
Diedar je skup od dvije poluravni koje ishode iz zajedničke prave. Zajednička prava se zove ivica diedra a poluravni su strane dijedra.

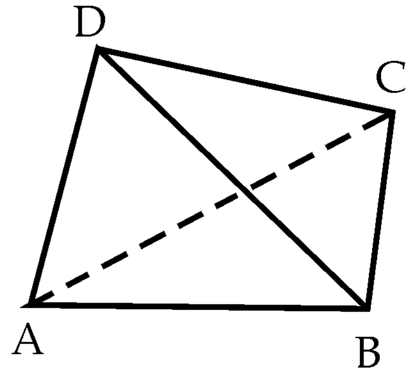
Triedar (trostrani poliedarski ugao) su tri poluprave $pp[S,A)$, $pp[S,B)$ i $pp[S,C)$ koje ishode iz jedne tačke S prostora i ne leže u jednoj ravni. Oglovi koje obrazuju po dvije od ovih polupravih nazivaju se ivični uglovi ili strane triedra. Tačka S je tjeme tetraedra.

Tetraedar ili trostrana piramida.

Poliedar (opisna definicija) je geometrisko tijelo trodimenzionalnog Euklidskog prostora ograničeno površima ravnih mnogouglova.







47. Dokazati da konveksan mnogougao i prava koja ne sadrži nijednu njegovu stranicu mogu da imaju najviše dvije zajedničke tačke.

48. Dokazati tvrđenja:
(a) Svaka dijagonala dijeli konveksan mnogougao na dva konveksna mnogougla;
(b) Svaka duž čije krajnje tačke pripadaju različitim stranicama konveksnog mnogougla dijeli taj mnogougao na dva konveksna mnogougla.

49. Mnogougao $A_1A_2...A_n$ je konveksan ako i samo ako su konveksni svi četverouglovi $A_iA_jA_kA_l$, $1 \leq i < j < k < l \leq n$. Dokazati.

50. (Helijeva teorema) Ako svake tri od n ($n \geq 3$) konveksnih figura iste ravni imaju neprazan presjek, tada je presjek svih n figura neprazan.

51. U ravni je dato n duži ($n \geq 3$), takve da svake tri od njih imaju zajedničku tačku. Dokazati da postoji tačka zajednička za sve duži.

APSOLUTNA GEOMETRIJA

Aksiome incidencije

Postoji osam aksioma incidencije (pripadanja):

I_1 Za svake dvije tačke A i B postoji prava a koja je incidentna i sa tačkom A i sa tačkom B.

I_2 Za svake dvije tačke A i B postoji najviše jedna prava koja je incidentna sa svakom od tačaka A i B

I_3 Za svaku pravu postoje bar dvije tačke koje su sa njom incidentne. Postoje bar tri tačke koje nisu incidentne sa istom pravom.

I_4 Za svake tri tačke A, B, C koje nisu incidentne sa istom pravom, postoji ravan koja je incidentna sa svakom od tačaka A, B, C. Svakoj ravni je incidentna bar jedna tačka.

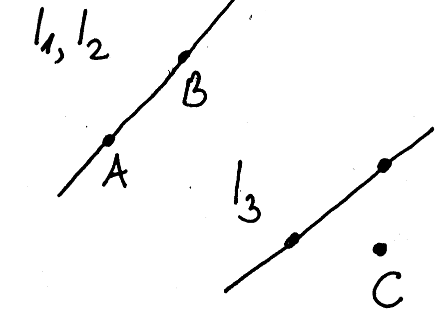
I_5 Za svake tri tačke A, B, C koje nisu incidentne sa istom pravom postoji najviše jedna ravan koja je incidentna sa svakom od tačaka A, B, C.

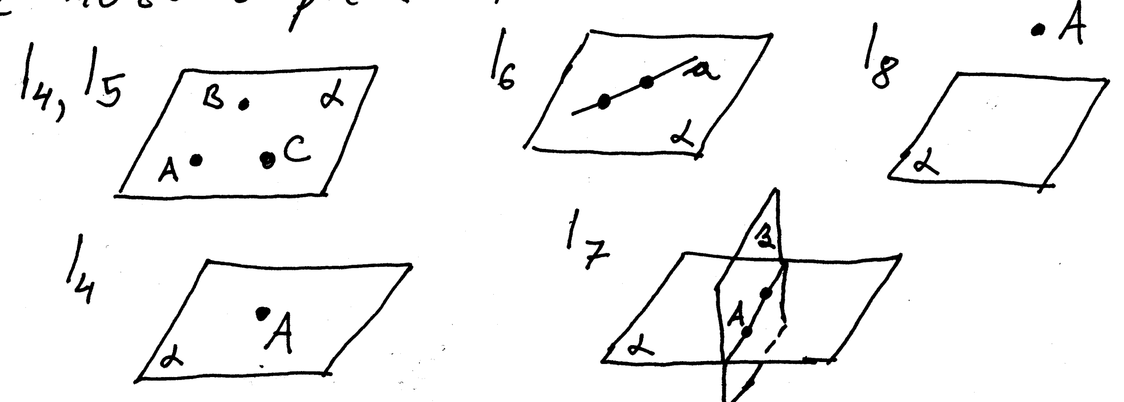
I_6 Ako su dvije tačke prave a incidentne sa ravni α, tada je svaka tačka prave a incidentna sa ravni α.

I_7 Ako postoji jedna tačka koja je incidentna i sa ravni α i sa ravni β, tada postoji bar još jedna tačka koja je incidentna i sa ravni α i sa ravni β.

I_8 Postoje bar četri tačke koje nisu incidentne sa istom ravni.

Skraćeno, aksiome možemo predstaviti slikama:



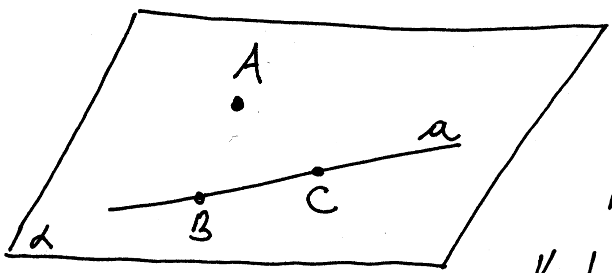


PITANJE: Kakva je razlika između aksioma I_1 i I_2?
Kakva je razlika između aksioma I_4 i I_5?

(1.) Dokazati da postoji jedna i samo jedna ravan koja sadrži datu pravu i tačku van nje.

Rj. postavka zadatka:

$a,\ A \notin a \Rightarrow \exists!$ ravan α: $a \subseteq \alpha$ i $A \in \alpha$



Za pravu a prema aksiomi I_3 $\exists B, C$: $B \in a$ i $C \in a$.

Tačke A, B i C su nekolinearne pa prema I_4, I_5 $\exists! \alpha$: $A \in \alpha$, $B \in \alpha$ i $C \in \alpha$

Kako je $B \in a, B \in \alpha$ i $C \in a, C \in \alpha$ prema aksiomu I_6 $a \subseteq \alpha$.

Prema tome $\exists!$ ravan α: $a \subseteq \alpha \wedge A \in \alpha$

q.e.d.

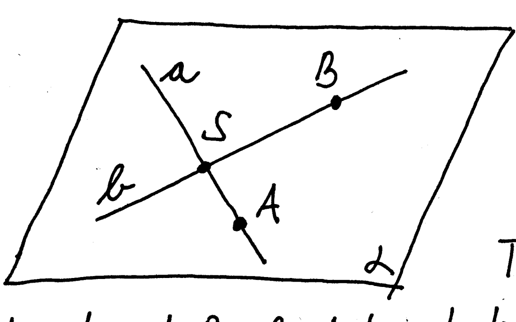
(2.) Dokazati da postoji jedna i samo jedna ravan koja sadrži dvije date prave koje se sijeku.

Rj. postavka zadatka:

$a,\ b,\ a \not\equiv b,\ a \cap b = \{S\} \Rightarrow \exists!\ \alpha: a \subseteq \alpha$ i $b \subseteq \alpha$

($\not\equiv$ čita se nije identički jednako)

$S \in a$ i $S \in b$



Pored S na pravoj a prema I_3 $\exists A: A \in a$

Pored tačke S na b prema I_3 $\exists B: B \in a$

Tačke A, B i S su nekolinearne. Zašto?

Ako bi A, B i S bile kolinearne to bi značilo da $\exists$ prava p: $A, B, S \in p$

$\left.\begin{array}{l} A, S \in p \text{ i } A, S \in a \text{ prema } I_1, I_2\ p \equiv a \\ B, S \in p \text{ i } B, S \in b \text{ prema } I_1, I_2\ p \equiv b \end{array}\right\} \Rightarrow a \equiv b$

kontradikcija (sa $a \not\equiv b$)

A, B i S su nekolinearne tačke pa prema I_4, I_5 $\exists!$ ravan α: $A \in \alpha$, $B \in \alpha$ i $C \in \alpha$

Kako $A \in a$ i $S \in a$, $A \in \alpha$ i $S \in \alpha$ prema I_6 $a \subseteq \alpha$

Kako $B \in b$, $S \in b$ i $B \in \alpha$, $S \in \alpha$ prema I_6 $b \subseteq \alpha$.

Prema tome $\exists!$ ravan α: $a \subseteq \alpha$ i $b \subseteq \alpha$

q.e.d.

$$p \Rightarrow (q \veebar r) \Longleftrightarrow (p \wedge \neg q \Rightarrow r) \wedge (p \wedge r \Rightarrow \neg q)$$

3. Dokazati da presjek dvije različite prave može biti ili prazan skup ili tačka.

Rj. postavka zadatka:

$$a, b, a \not\equiv b \Rightarrow a \cap b = \emptyset \veebar a \cap b = \{S\}.$$

zadatak možemo podjeliti u dva dijela

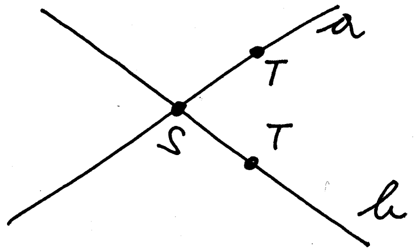
a) $a, b, a \not\equiv b, a \cap b \neq \emptyset \Rightarrow a \cap b = \{S\}$

b) $a, b, a \not\equiv b, a \cap b = \{S\} \Rightarrow a \cap b \neq \emptyset$

Slučaj pod b) je trivijalan.

Dokažimo slučaj pod a) (dokazaćemo kontradikcijom).

Kako je $a \cap b \neq \emptyset$, recimo da pored tačke S prave a i b imaju i neku zajednička tačka T tj. $\{S, T\} \subseteq a \cap b$.



Kako $S \in a$, $T \in a$ i $S \in b$, $T \in b$ prema I_1, I_2 $a \equiv b$ #kontradikcija (sa $a \not\equiv b$)

Pretpostavka da postoje dvije tačke kao presjek pravih a i b nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Pa je $a \cap b = \{S\}$.

Kako su obe tvrdnje pod a) i b) tačne slijedi da

$$a \cap b = \emptyset \veebar a \cap b = \{S\}$$

q.e.d.

4. Dokazati da presjek dvije različite ravni može biti ili prazan skup ili prava.

Rj: postavka zadatka:

$\alpha, \beta, \alpha \not\equiv \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = \emptyset \vee \alpha \cap \beta = p$

Imamo dva dijela dokaza

a) $\alpha, \beta, \alpha \not\equiv \beta, \alpha \cap \beta \neq \emptyset \Rightarrow \alpha \cap \beta = p$

b) $\alpha, \beta, \alpha \cap \beta = p \Rightarrow \alpha \cap \beta \neq \emptyset$

Slučaj pod b) je trivijalan. Dokažimo slučaj pod a).

Kako je $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ to $\exists$ tačka $A: A \in \alpha \cap \beta$

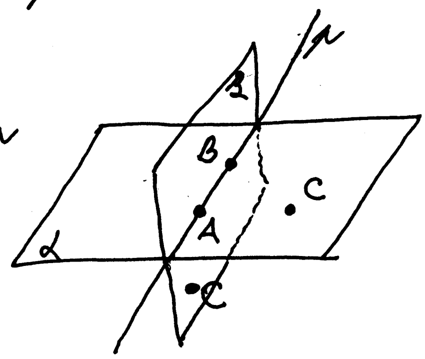
$A \in \alpha$ i $A \in \beta$ prema aksiomi I_7 $\exists B: B \in \alpha$ i $B \in \beta$

Za A i B prema I_1, I_2 $\exists!$ prava $p: A \in a$ i $B \in a$

Kako $A \in p, B \in p$ i $A \in \alpha, B \in \alpha$ prema I_6 $p \subseteq \alpha$

Kako $A \in p, B \in p$ i $A \in \beta, B \in \beta$ prema I_6 $p \subseteq \beta$

Dokažimo još da je $\alpha \cap \beta = p$



Pretpostavimo da pored prave p $\exists C \notin p$ takva da je $p \cup \{C\} \subseteq \alpha \cap \beta$.

Za p i C prema zadatku 1. postoji $\exists! \gamma: p \subseteq \gamma$ i $C \in \gamma$.

Sad imamo $\gamma \subseteq \alpha \cap \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = \gamma \Rightarrow \alpha \equiv \beta$

#kontradikcija (sa $\alpha \not\equiv \beta$)

Do kontradikcije smo mogli doći i na drugi način:

$p \cup \{C\} \subseteq \alpha \cap \beta \Rightarrow C \in \alpha$ i $C \in \beta$

$A \in \alpha, B \in \alpha, C \in \alpha$ i $A \in \beta, B \in \beta, C \in \beta$ prema I_1, I_2 $\alpha \equiv \beta$

#kontradikcija

Pretpostavka da pored prave p postoji još neka tačka na presjeku dvije ravni nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome $\alpha \cap \beta = p$.

Kako su obe tvrdnje pod a) i b) tačne, slijedi da

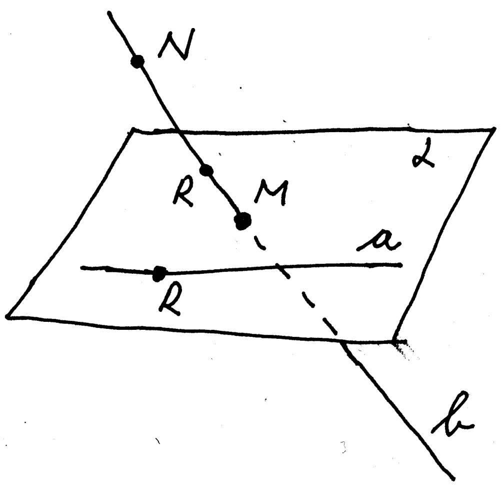
ili $\alpha \cap \beta = \emptyset$ ili $\alpha \cap \beta = p$ q.e.d.

5. Dokazati da za datu pravu a postoji prava b koja s njom nema zajedničkih tački.

Napomena: Prave koje ne leže u jednoj ravni, zovu se mimoilaznim pravama.

Rj: postavka zadatka:

$$a \Rightarrow \exists b: a \cap b = \emptyset$$



Neka je data prava a.

Prema aksiomi I_3 $\exists M: M \notin a$.

Za M i a prema 1. zadatku $\exists! \alpha: M \in \alpha$ i $a \subseteq \alpha$.

Za ravan α prema I_8 $\exists N: N \notin \alpha$

Za M i N prema I_1, I_2 $\exists! b: M \in b$ i $N \in b$.

Za prave a i b prema 3. zadatku ili $a \cap b = \emptyset$ ili $a \cap b = \{R\}$

Pretpostavimo da je $a \cap b \neq \emptyset$. To znači $a \cap b = \{R\} \Rightarrow$
$\Rightarrow R \in a$ i $R \in b$. Kako je $a \subseteq \alpha$ i $R \in a$ to je $R \in \alpha$.
$R \in \alpha, M \in \alpha$ i $R \in b, M \in b$ prema I_6 $b \subseteq \alpha \Rightarrow N \in \alpha$
#kontradikcija ($N \notin \alpha$)

Pretpostavka da je $a \cap b \neq \emptyset$ nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome $a \cap b = \emptyset$.

Dokazali smo da za pravu a postoji prava b takva da je $a \cap b = \emptyset$

q.e.d.

6. Dokazati da je svaka ravan incidentna sa najmanje tri tačke.

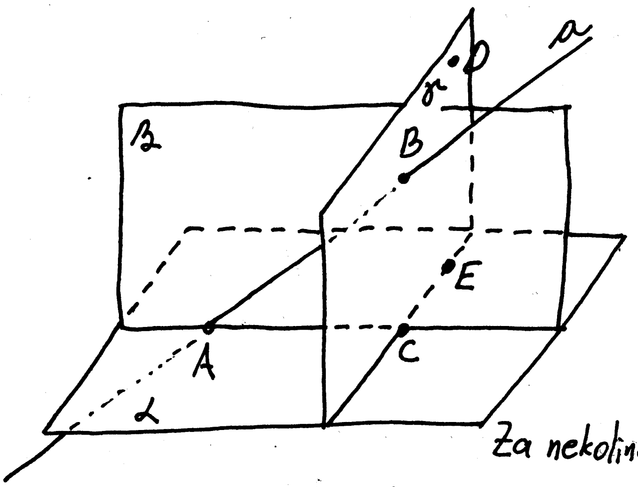
Rj. postavka zadatka

ravan α $\Rightarrow$ $\exists$ tačke A, B i C: $A \in \alpha, B \in \alpha$ i $C \in \alpha$.

Za datu ravan α prema aksiomi I_4 $\exists A: A \in \alpha$.

Za ravan α, prema I_8 $\exists B: B \notin \alpha$.

Za A i B prema I_1, I_2 $\exists! a: A \in a$ i $B \in a$.



Za pravu a prema I_3 $\exists C: C \notin a$

Moguća su dva slučaja:

1° $C \in \alpha$

2° $C \notin \alpha$

1° $C \in \alpha$

Za nekolinea. A, B, C prema I_4, I_5 $\exists!\, \beta: A \in \beta, B \in \beta$ i $C \in \beta$

Za β prema I_8 $\exists D: D \notin \beta$. Moguća su dva slučaja

a) $D \in \alpha$

b) $D \notin \alpha$.

Ako bi bilo da $D \in \alpha$, problem je riješen: Tri tražene tačke koje pripadaju ravni α su A, C i D.

Ako $D \notin \alpha$, tad za nekolinear. C, B i D prema I_4, I_5 $\exists!\, \gamma: B \in \gamma, C \in \gamma$ i $D \in \gamma$.

Iz $D \in \alpha, D \in \gamma$ prema aksiomu I_7 $\exists E: E \in \alpha$ i $E \in \gamma$

$E \notin p(A,C)$

(Ako bi $E \in p(A,C)$, $C \in \gamma$ i $E \in \gamma$ prema I_6 $p(C,E) \subseteq \gamma$, tad $A \in \gamma$.
Dalje imali bi $A, C, B \in \gamma$ pa prema I_4, I_5 (kako ravan β određuju tačke A, C i B) je $\gamma \equiv \beta \Rightarrow D \in \beta$
#kontradikcija (sa $D \notin \beta$))

Prema tome tri tražene tačke koje su incidentne sa α su A, C i E

Ostaje nam još slučaj 2° $C \notin \alpha$

A, B, C nekolinearne, prema I_4 $\exists \beta: A \in \beta, B \in \beta$ i $C \in \beta$

$A \in \alpha$ i $A \in \beta$ prema I_7 $\exists D: D \in \alpha$ i $D \in \beta$

Za ravan β prema I_8 $\exists E: E \notin \beta$

Ako bi bilo $E \in \alpha$, zadatak je gotov.
(tačke A, D i E incidentne su sa α)

Za $E \notin \alpha$ imamo:

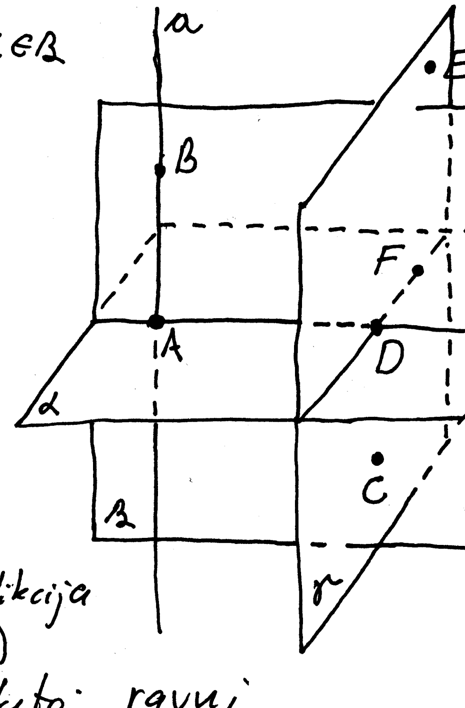
E, D i C nekolinearne, prema I_4, I_5 $\exists!\, \gamma: E, D, C \in \gamma$

$D \in \alpha$ i $D \in \gamma$ prema I_7 $\exists F: F \in \alpha$ i $F \in \gamma$

$F \notin p(A,D)$ (Ako bi $F \in p(A,D)$ imali bi

$$\left.\begin{array}{l} A \in p(F,D) \subseteq \gamma, \; A, D, C \in \gamma \\ A, D, C \in \beta \end{array}\right\} \xRightarrow{I_4, I_5} \beta \equiv \gamma \Rightarrow E \in \beta$$

#kontradikcija ($E \notin \beta$))



Tačke A, D i F su incidentne sa α.

Našli smo tri tačke koje pripadaju datoj ravni.

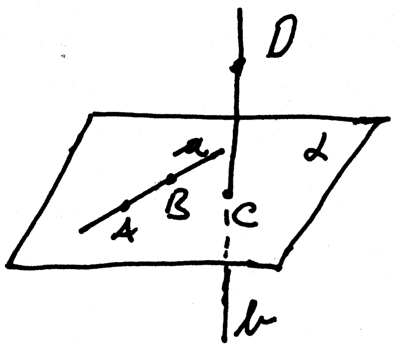
q.e.d.

(#) Isključivo aksiomama incidencije i poretka dokazati da za svaku pravu a postoji prava b, takva da prave a i b ne pripadaju istoj ravni.

Napomena: Prave koje ne leže u jednoj ravni zovu se mimoilaznim pravama.

Rj: postavka zadatka

prava a $\Longrightarrow$ $\exists b$: a i b ne pripadaju istoj ravni



Neka je data prava a.
Prema aksiomi I_3 $\exists C: C \notin a$, i prema istoj aksiomi $\exists A, B$: $A, B \in a$.

Za tačke A, B i C (koje su nekolinearne) prema aksiomi I_{I} i I_6 $\exists$ tačno jedna ravan α: $A \in \alpha$, $B \in \alpha$ i $C \in \alpha$.
Za ravan α prema aksiomi I_8 $\exists$ tačka D takva da $D \notin \alpha$. Prava $p(D, C)$ je tražena prava.

Uvedimo oznaku $b = p(D, C)$.

Ako bi prave a i b bile komplanarne, tj. pripadale nekoj ravni β, imali bi da $A, B, C, D \in \beta$.

$$\left.\begin{array}{l} A, B, C \in \alpha \\ A, B, C \in \beta \end{array}\right\} \xRightarrow{I_4, I_5} \alpha \equiv \beta \Rightarrow b \subset \alpha \Rightarrow D \in \alpha$$

kontradikcija

Pretpostavka da su prave a i b komplanarne nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome: za svaku pravu a postoji prava b, takva da prave a i b ne pripadaju istoj ravni. q.e.d.

Aksiome poretka

Postoje četiri aksiome poretka:

II_1 Ako je $A-B-C$ tada su A, B i C tri različite tačke jedne iste prave i takođe je $C-B-A$.

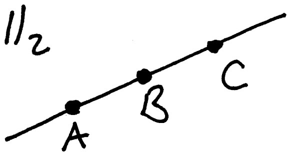
II_2 Za svake dvije tačke A i B postoji tačka C, takva da je $A-B-C$

II_3 Ako su A, B i C tri tačke jedne prave, tada važi najviše jedna od relacija: $A-B-C$, $B-C-A$ ili $C-A-B$.

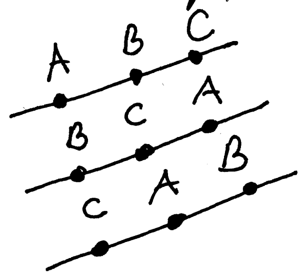
II_4 (Pašova aksioma) Neka su A, B, C tri nekolinearne tačke i neka je p prava koja je incidentna sa ravni ABC i nije incidentna ni sa jednom od tačaka A, B, C. Ako postoji tačka $D \ni p$ takva da je $A-D-B$ tada postoji tačka $E \in p$ takva da važi bar jedna od relacija $B-E-C$ ili $C-E-A$.

Skraćeno, aksiome možemo predstaviti slikama:

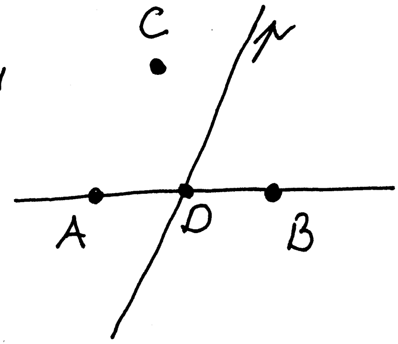
II_1, II_2



II_3



II_4



1. Za svake dvije tačke A i B postoji tačka C takva da je $A-C-B$.

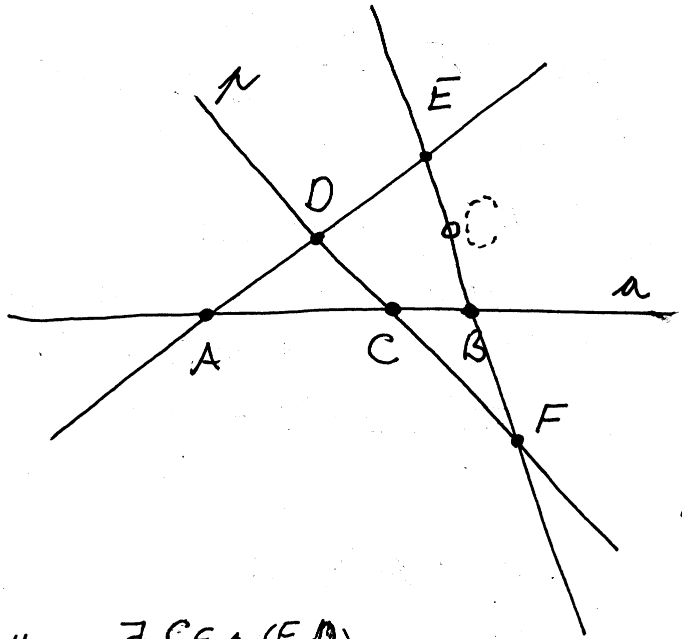
Rj. postavka zadatka:

$$A, B \Rightarrow \exists C : A-C-B$$

Neka su date tačke A i B. Pomoću aksioma incidencije i poretka trebamo dokazati da postoji C takva da je $A-C-B$.

za A i B prema I_1, I_2 $\exists!\, a : A \in a$ i $B \in a$

za pravu a prema I_3 $\exists D : D \notin a$



za $A, D \overset{II_2}{\Longrightarrow} \exists E: A-D-E$

za $E, B \overset{II_2}{\Longrightarrow} \exists F: E-B-F$

za $D, F \overset{I_1, I_2}{\Longrightarrow} \exists! p: D \in p$ i $F \in p$

$$\left.\begin{array}{l} A, B, E \text{ nekolin. tačke} \\ p(F,D) \text{ nije incidentna ni sa jednom od tački } A, B, E \\ A-D-E \end{array}\right\} \overset{II_4}{\Longrightarrow}$$

$\overset{II_4}{\Longrightarrow}$ $\exists C \in p(F, D)$

$\Longrightarrow A-C-B \ \veebar \ B-C-E$

Pokažimo da ne vrijedi $B-C-E$.

Ako bi ovo vrijedilo, to znači da $C \ni p$: $E-C-B$

$$\left.\begin{array}{l} C, F \in p \\ C, F \in p(E, B) \end{array}\right\} \overset{I_1, I_2}{\Longrightarrow} p = p(E, B)$$

$$\Downarrow$$

$$D, E, C, B, F \in p$$

$$\left.\begin{array}{l} A-D-E \\ D, E \in p \end{array}\right\} \overset{I_1, I_2}{\Longrightarrow} A, B, C, D, E, F \in p \Longrightarrow p \equiv a$$

$$\Downarrow$$

$$D \in a$$

#kontradikcija ($D \notin a$)

Pokazali smo da ne vrijedi $B-C-E$, pa nam vrijedi $A-C-B$

q.e.d.

2. Date su četiri kolinearne tačke A, B, C, D. Dokazati da važe sledeća dva tvrđenja:

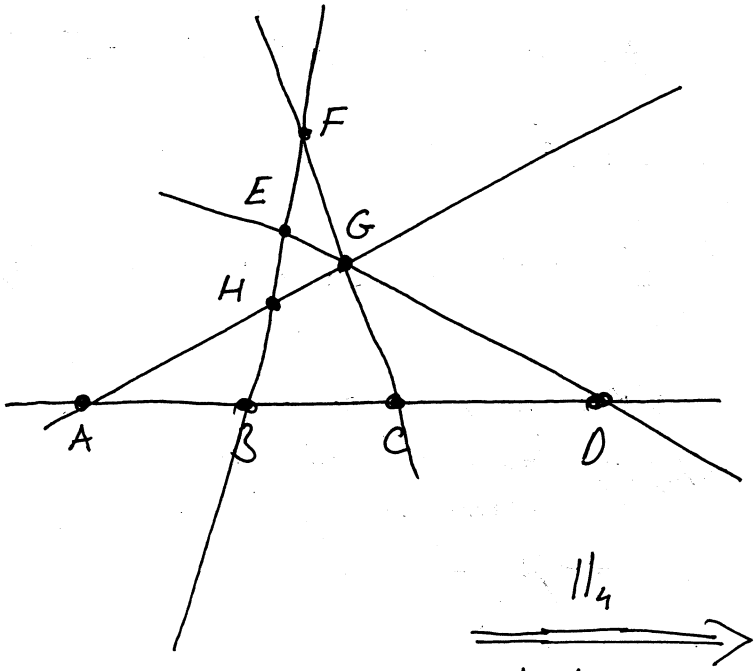
a) Ako je $A-B-D$ i $B-C-D$ tada je $A-B-C$

b) Ako je $A-B-D$ i $B-C-D$ tada je $A-C-D$

Rj. a) $A-B-D \wedge B-C-D \Longrightarrow A-B-C$

A, B, C, D kolinearne tačke $\Longrightarrow A, B, C, D \in p(A, D)$

za $p(A, D) \overset{I_3}{\Longrightarrow} \exists E: \quad E \notin p(A, D)$



za $B, E \overset{II_2}{\Longrightarrow} \exists F:\ B-E-F$

B, C, F nekolinearne tačke
$p(E,D)$ nije incidentna ni sa jed. od tač. B, C, F
$p(E,D) \ni E:\ B-E-F$

$\overset{II_4}{\Longrightarrow}$ (i kako je poredak $B-C-D$)

$\exists G \in p(E,D):$
$C-G-F$

B, D, E nekolinearne tačke
$p(C,F)$ nije incidentna ni sa jedn. od tač. B, D, E
$p(C,F) \ni C:\ B-C-D$

$\overset{II_4}{\Longrightarrow}$ (i kako je poredak $B-E-F$)

$\exists G \in p(C,F):$
$D-G-E$

A, D, G nekolinearne tačke
$p(B,F)$ nije incidentna ni sa jedn. od. tač. A, D, G
$p(B,F) \ni B:\ A-B-D$

$\overset{II_4}{\Longrightarrow}$ (i kako je poredak $D-G-E$)

$\exists H \in p(B,F):$
$A-H-G$

A, C, G nekolinearne tačke
$p(B,F)$ nije incidentna ni sa jednom od tač. A, C, G
$p(B,F) \ni H:\ A-H-G$

$\overset{II_4}{\Longrightarrow}$ (i kako je poredak $C-G-F$)

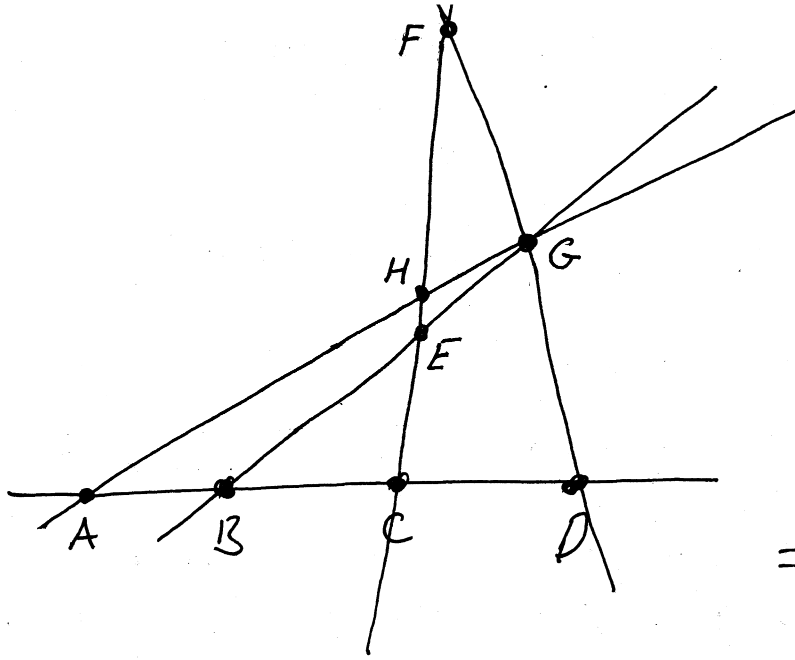
$B \in p(B,F):$
$A-B-C$

q.e.d.

b) $A-B-D \ \wedge\ B-C-D \Longrightarrow A-C-D$

A, B, C, D kolinearne tačke $\Longrightarrow A, B, C, D \in p(A,D)$

za $p(A,D) \overset{I_3}{\Longrightarrow} \exists E:\ E \notin p(A,D)$



za $C, E \overset{II_2}{\Longrightarrow} \exists F: C-E-F$

C, D, F nekolin. tač.
$p(B,E)$ nije incidentna
ni sa jed. od tač. C, D, E
$p(B,E) \ni E: \; C-E-F$

$\overset{II_4}{\Longrightarrow}$ (i kako je poredak $B-C-D$) $\exists G \in p(B,E)$: $D-G-F$

B, D, G nekolinearne tačke
$p(C,F)$ nije incidentna
ni sa jed. od. tač. B, D, G
$p(C,F) \ni C: \; B-C-D$

$\overset{II_4}{\Longrightarrow}$ (i kako je poredak $D-G-F$) $E \in p(C,F)$: $B-E-G$

$A-B-D \;;\; B-C-D \xrightarrow{\text{na osnovu zadatka pod a)}} A-B-C$

A, B, G nekolinearne tačke
$p(C,F)$ nije incidentna
ni sa jed. od tačaka A, B, G
$p(C,F) \ni E: \; B-E-G$

$\overset{II_4}{\Longrightarrow}$ (i kako je poredak $A-B-C$) $\exists H \in p(C,F)$: $A-H-G$

A, D, G nekolinearne tačke
$p(C,F)$ nije incidentna
ni sa jed. od tač. A, D, G
$p(C,F) \ni H: \; A-H-G$

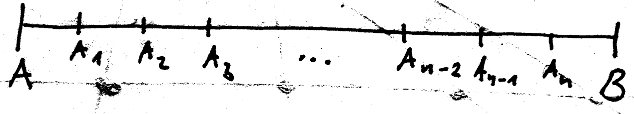
$\overset{II_4}{\Longrightarrow}$ (i kako je poredak $D-G-F$) $C \in p(C,F)$: $A-C-D$

q.e.d.

3. Dokazati da svaka duž ima beskonačno mnogo tačaka.

Rj. data je duž AB $\Rightarrow$ AB ima ∞ mnogo tačaka

Neka je data duž AB.



Pretpostavimo suprotno tvrdnji, tj. pretpostavimo da duž AB ima konačno mnogo tački $A_1, A_2, \ldots, A_n$ i bez ograničenja za opšti slučaj pretpostavimo da važi poredak $A - A_1 - A_2 - \ldots - A_{n-1} - A_n - B$.

Pitanje: Zašto smijemo pretpostaviti da važi ovakav poredak?

Za tačke A_n i B prema zadatku 1. postoji tačka M takva da je $A_n - M - B$. Sad imamo:

$$\left.\begin{array}{l} A - A_n - B \\ A_n - M - B \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{prema zadatku 2.}} A - M - B$$

tj. tačka M se nalazi na duži AB

kontradikcija (sa pretpostavkom da su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sve tačke na duži AB)

Pretpostavka da duž ima konačno mnogo tački nas je dovela u kontradikciju pa nije tačna.

Duž AB ima ∞ mnogo tački.

q.e.d.

(#) (Pašova teorema) Prava p pripada ravni koja je određena nekolinearnim tačkama A, B, C i ne sadrži nijednu od tih tačaka. Ako pri tom prava siječe pravu $p(A,B)$ između tačaka A i B tada ona siječe ili pravu $p(B,C)$ između tačaka B i C ili pravu $p(A,C)$ između tačaka A i C.

Rj. postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} A, B, C \text{ nekolinearne tačke} \\ p \text{ pripada ravni } ABC \\ A, B, C \notin p, \quad A-p-B \end{array}\right\} \Rightarrow B-p-C \veebar A-p-C$$

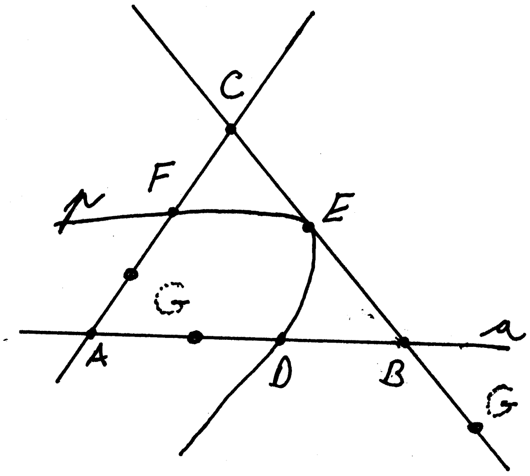
$A-p-B \Rightarrow \exists D \in p: \; A-D-B$

$B-p-C \Rightarrow \exists E \in p: \; B-E-C$

$A-p-C \Rightarrow \exists F \in p: \; A-F-C$

Na osnovu Pašove aksiome dovoljno je pokazati da obe tvrdnje ne mogu vrijediti istovremeno.

Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da je istovremeno i $B-p-C$ i $A-p-C$. Bez ograničenja pretpostavimo da vrijedi $D-E-F$.



Označimo sa $a = p(A,B)$.

Tačke A, D i F su nekolinearne.

(u suprotnom bi imali

$$\left.\begin{array}{l} A-D-F \\ A-D-B \\ A-F-C \end{array}\right\} \xRightarrow{I_1, I_2} A, B, C \in a$$

kontradikcija (A, B, C nekolinearne))

$$\left.\begin{array}{l} A, D, F \text{ nekolinearne tač.} \\ p(B,C) \text{ nije incidentna ni sa jednom od tački } A, D, F \\ p(B,C) \ni E: \; D-E-F \end{array}\right\} \xRightarrow{II_4} \begin{array}{l} \exists G \in p(B,C): \\ A-G-D \\ \veebar \; A-G-F \end{array}$$

Ako bi važio poredak $A-G-D$ imali bi

$$\left.\begin{array}{l} A-G-D \\ A-D-B \\ G \in p(B,C) \end{array}\right\} \xRightarrow{I_1, I_2} A, B, C \in a$$

kontradikcije

Prema tome nije $A-G-D$.

Ako bi važio poredak $A-G-F$ imali bi

$$\left.\begin{array}{l} A-G-F \\ A-F-C \\ G \in p(B,C) \end{array}\right\} \xRightarrow{I_1, I_2} A, B, C \in a$$

kontradikcija

Prema tome nije $A-G-F$.

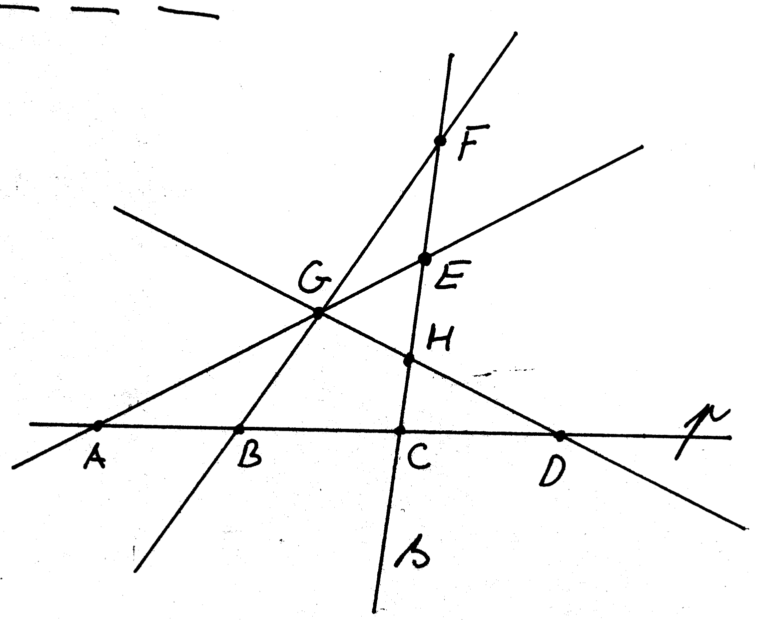
Pretpostavka da vrijede obe tvrdnje nas je dovela u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome vrijedi tačno jedna od tvrdnji

$B-p-C$ ili $A-p-C$ q.e.d.

(#) Date su četri kolinearne tačke A, B, C, D. Isključivo aksiomama incidencije i poretka dokazati da ako je $A-B-C$ i $A-C-D$ tada je $B-C-D$.

Rj. postavka zadatka

$A-B-C,\ A-C-D \Rightarrow B-C-D$.



Označimo sa p pravu koja je incidentna sa tačkama A, B, C i D.

za p prema I_3 $\exists E: E \notin p$.

za C i E prema II_2 $\exists F: C-E-F$

$\left.\begin{array}{l} A, C, E \text{ nekolinearne tačke} \\ p(B,F) \text{ nije incidentna ni sa jednom od tački } A, C, E \\ B \in p(B,F): A-B-C \end{array}\right\} \overset{II_4}{\Longrightarrow}$

$\overset{II_4}{\Longrightarrow} \exists G \in p(B,F): A-G-E \vee C-G-E$

Prava $p(B,F)$ ne siječe $p(C,E)$ između C i E zato što tu pravu siječe u tački F $(C-E-F)$. Prema tome $A-G-E$

$\left.\begin{array}{l} B, C, F \text{ nekolinearne tačke} \\ p(A,E) \text{ nije incidentna ni sa jednom od tački } B, C, F \\ p(A,E) \ni E: C-E-F \end{array}\right\} \underset{A-B-C}{\overset{II_4}{\Longrightarrow}} B-G-F$

$\left.\begin{array}{l} A, D, G \text{ nekolinearne tačke} \\ p(C,E) \text{ nije incidentna ni sa jednom od tački } A, D, G \\ p(C,E) \ni C: A-C-D \end{array}\right\} \overset{II_4}{\Longrightarrow} \exists H \in p(C,E):$

$D-H-G \vee A-H-G$

Prava $p(C,E)$ ne siječe pravu $p(A,G)$ između tački A i G zato što tu pravu ona siječe u tački E (kako je $A-G-E$). Prema tome imamo $D-H-G$.

Primjetimo da tačke C, H, E, F leže na istoj pravoj (poredak nam nije bitan), koju ćemo označiti sa s.

$\left.\begin{array}{l} B, D, G \text{ nekolinearne tačke} \\ \text{prava } s \text{ nije incidentna ni sa} \\ \text{jednom od tački } B, D, G. \\ s \ni H: D-H-G \end{array}\right\} \overset{II_4}{\Longrightarrow}$ prava s siječe ili duž BG ili duž BD.

Prava s ne siječe $p(B,G)$ između tački B i G zato što ona tu pravu siječe u $F(B-G-F)$. Prema tome siječe pravu $p(B,D)$ između tački B i D a kako je $p(B,D)=p$ to je poredak $B-C-D$ q.e.d.

(#) Neka je data poluravan α s ivicom u pravoj s i neka su date tačke $S \in s$ i $T \in \alpha$. Dokazati da je poluprava $pp[S,T) \subseteq \alpha$.

Rj. $\alpha = pr[s,T) \wedge S \in s \Longrightarrow pp[S,T) \subseteq \alpha$.

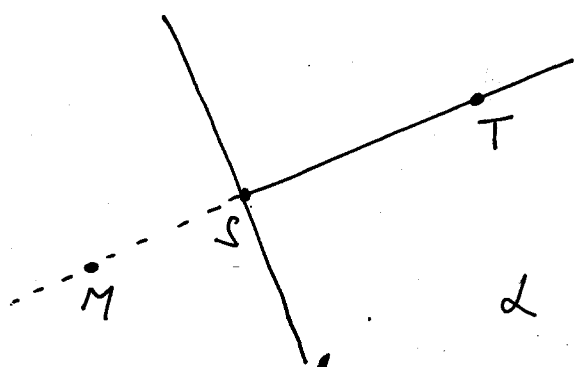
Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. $pp[S,T) \nsubseteq \alpha$

$\Rightarrow \exists M: M \in pp[S,T) \wedge M \notin \alpha$

$M \in pp[S,T) \Rightarrow \neg(M-S-T)$

Kako $M \notin \alpha$ i $T \in \alpha$, tačke M i T se nalaze sa suprotne strane prave s $\overset{II_3}{\Longrightarrow}$ $M-S-T$

\# kontradikcija (sa $\neg(M-S-T)$)



Pretpostavka da $pp[S,T) \nsubseteq \alpha$ nas je dovela do kontradikcije pa nije tačna.

Prema tome: $pp[S,T) \subseteq \alpha$

q.e.d.

6. Prava koja pripada ravni nekog trougla i prolazi kroz jednu njegovu unutrašnju tačku ima sa tim trouglom tačno dvije zajedničke tačke. Dokazati.

Rj. $\left.\begin{array}{l} \Delta ABC \subseteq \alpha \\ p \subseteq \alpha \\ p \ni M:\ M \in \text{unutr. } \Delta ABC \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists P, Q:\ P, Q \in p \ \wedge\ P, Q \in \Delta ABC$

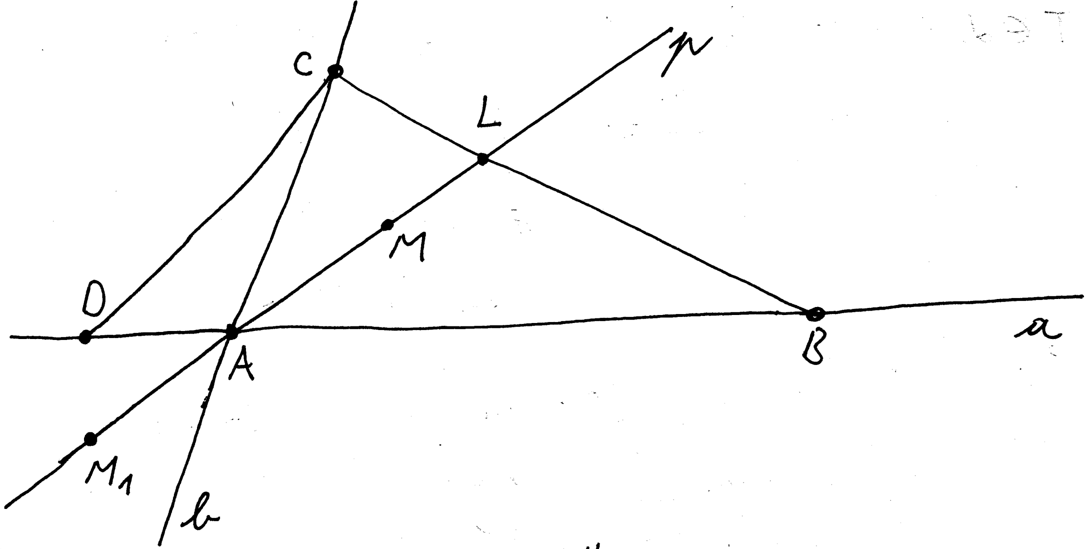
Riješimo zadatak u specijalnom slučaju tj. riješimo zadatak:

Prava koja pripada ravni nekog trougla, i koja prolazi kroz vrh trougla i jednu njegovu unutrašnju tačku ima sa tim trouglom još samo jednu zajedničku tačku.

$\left.\begin{array}{l} p, \Delta ABC \subseteq \alpha \\ A \in p \\ p \ni M:\ M \in \text{unutr. } \Delta ABC \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists L:\ L \in p \ \wedge\ L \in \Delta ABC$

Nacrtajmo sliku.

Za tačke $B, A \overset{II_2}{\Longrightarrow} \exists D:\ B-A-D$



Za tačke $M, A \overset{II_2}{\Longrightarrow} \exists M_1 : M-A-M_1$

$\left.\begin{array}{l} B, D, C \text{ nekolinearne tačke} \\ p \text{ nije incidentna } B, D, C \\ p \ni A : B-A-D \end{array}\right\} \overset{II_4}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} \exists L : L \in p \\ B-L-C \ \veebar \ D-L-C. \end{array}$

Pokažimo da ne vrijedi $D-L-C$.

Uvedimo oznake: $a = p(B, D)$
$b = p(A, C)$

Posmatrajmo dvije različite poluravni: $pr[a, C)$ i $pr[a, M_1)$. Prema prethodnom zadatku:

$$pp[A, M_1) \subseteq pr[a, M_1) \quad \dots (1)$$

$$pp[D, C) \subseteq pr[a, C) \quad \dots (2)$$

Poluravni $pr[a, C)$ i $pr[a, M_1)$ su različite zato što iz poretka $M-A-M_1$ zaključujemo da je $M_1 \in$ vanjske obl. $\triangle ABC$ a s druge strane $C \in \triangle ABC$.

Iz (1) i (2) $\Rightarrow pp[A, M_1) \cap DC = \emptyset$.

Posmatrajmo sad $pr[b, D)$ i $pr[b, M)$. Ovo su dvije različite poluravni. Zašto?
($M \in$ unutr. obl. $\triangle ABC$ a iz $B-A-D \Rightarrow D \in$ vanjsk. obl. $\triangle ABC$)

Prema prethodnom zadatku:

$$\left.\begin{array}{l} pp[C,O) \subseteq pr[b,O) \\ pp[A,M] \subseteq pr[b,M) \end{array}\right\} \Rightarrow pp[A,M] \cap CO = \emptyset$$

Kako je $p = pp[A,M) \cup pp[A,M_1) \Rightarrow p \cap CO = \emptyset$

$$\Downarrow$$

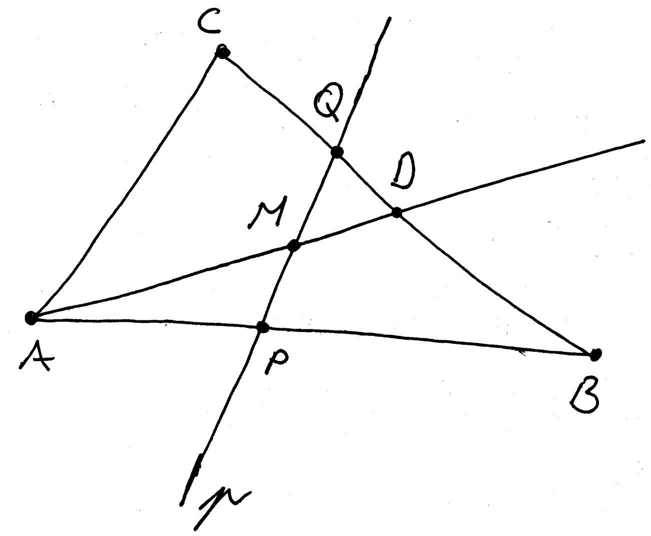
$$\neg(O-L-C)$$

Prema tome mora biti $B-L-C$.

q.e.d.

Vratimo se na zadatak.

Neka je p, $\triangle ABC \subseteq \alpha$ i $p \ni M$: $M \in$ unutr. $\triangle ABC$.



Prema specijalnom slučaju $pp[A,M) \cap BC = \{D\}$:

$B-D-C$.

$$\left.\begin{array}{l} A, B, D \text{ nekolinearne tačke} \\ p \text{ nije incidentna ni} \\ \quad \text{sa jednom od tački } A, B, D \\ p \ni M:\ A-M-D \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{II_4} \quad \exists P: \quad A-P-B \ \veebar \ B-P-D$$

(Pitanje: Zašto je poredak $A-M-D$?)

$$\left.\begin{array}{l} A, D, C \text{ nekolinearne tačke} \\ p \text{ nije incidentna ni} \\ \quad \text{sa jednom od tački } A, D, C \\ p \ni M:\ A-M-D \end{array}\right\} \xRightarrow{II_4} \quad \exists Q: \quad A-Q-C \ \veebar \ D-Q-C$$

Ako bi istovremeno vrijedilo $B-P-D$ i $D-Q-C$ tad bi imali:

$$\left.\begin{array}{l} B-D-C \\ B-P-D \\ D-Q-C \end{array}\right\} \xrightarrow{I_1, I_2} p \equiv p(B,C)$$

$$\Downarrow$$

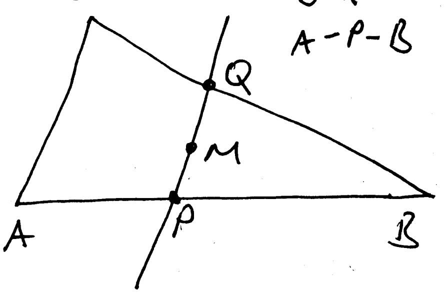
$$M \in p(B,C) \quad \# \text{ kontradikcija}$$

$(M \in$ unutraš. obl. $\Delta ABC)$

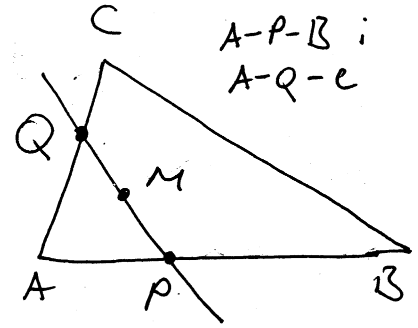
Prema tome ne može istovremeno vrijediti $B-P-C$ i $D-Q-C$.

Preostala tri slučaja:

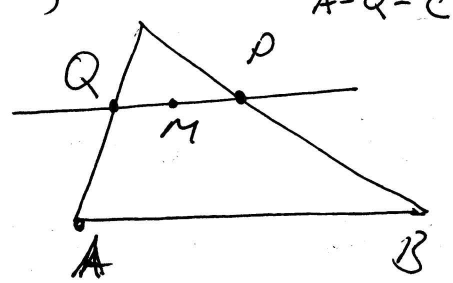
a) $B-Q-C$ i $A-P-B$



b) $A-P-B$ i $A-Q-C$



c) $B-P-C$ i $A-Q-C$

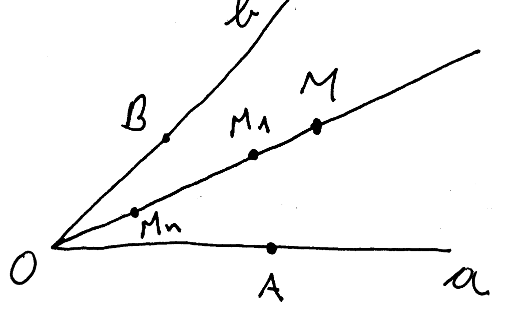


su mogući slučaji i nisu u kontradikciji. Iz bilo kojeg od njih vidimo da prava p ima sa ΔABC tačno dvije zajedničke tačke.

q. e. d.

7. Dat je ugao $\measuredangle aOb$ i tačka M unutar tog ugla. Dokazati da poluprava $pp[O,M)$ siječe svaku duž AB gdje je $A \in a$ i $B \in b$.

Rj. $\measuredangle aOb \wedge M \in$ unutr. $\measuredangle aOb \Rightarrow \forall(A \in a)\ \forall(B \in b)\ pp[O,M) \cap AB \neq \emptyset$



Nacrtajmo sliku.
Uzmimo proizvoljne $A \in a$ i $B \in b$.
Mogu se desiti tri slučaja:

1° $M \in$ unutr. ΔABC
(ovo znači da nisu mogući slučaji $M \in AB \vee M \in OA \vee M \in OB$)

2° $M \in \Delta ABC$ (ovo znači da je tačno jedan od slučajeva $M \in AB \vee M \in OA \vee M \in OB$)

3° $M \in$ vanjsk. ΔOAB

Ako se desi slučaj 1°, prema 6_0 zadatku je

$$pp[O, M) \cap AB \neq \emptyset$$

q.e.d.

Ako je 2° imamo $pp[O, M] \cap AB = \{M\}$

q.e.d.

Pitanje: Zašto za 2° nije moguće $M \in OA \vee M \in OB$?

Razmotrimo slučaj 3°

$$\left.\begin{array}{l} M \in \text{unutr. } \measuredangle aOb \\ M \in \text{vanj. } \triangle OAB \end{array}\right\} \Rightarrow \text{za tačke } O \text{ i } M \text{ prema zadatku } 1_0 \ \exists M_1 : O - M_1 - M$$

Za tačku M_1 moguć je jedan od tri slučaja 1°, 2° i 3°.

Za slučajeve 1° i 2° dokaz je gotov.

Za slučaj 3° bi imali

$$\left.\begin{array}{l} M_1 \in \text{unutr. } \measuredangle aOb \\ M_1 \in \text{vanj. } \triangle OAB \end{array}\right\} \Rightarrow \text{za tačke } O \text{ i } M_1 \text{ prema zadatku } 1_0 \ \exists M_2 : O - M_2 - M_1.$$

Ponavljajući ovaj postupak dobićemo neku tačku M_n koja je "bliža" tački O od tačke M_{n-1} ($M_{n-2}, \dots, M_1, M$) i za koju vrijedi koja je kolinearna sa tačkama $M_{n-1}, \dots, M$ i za

$M \in$ unutr. $\triangle ABC \vee M \in \triangle ABC$.

$$pp[O, M_n) = pp[O, M_{n-1}) = \dots = p[O, M] \cap AB \neq \emptyset$$

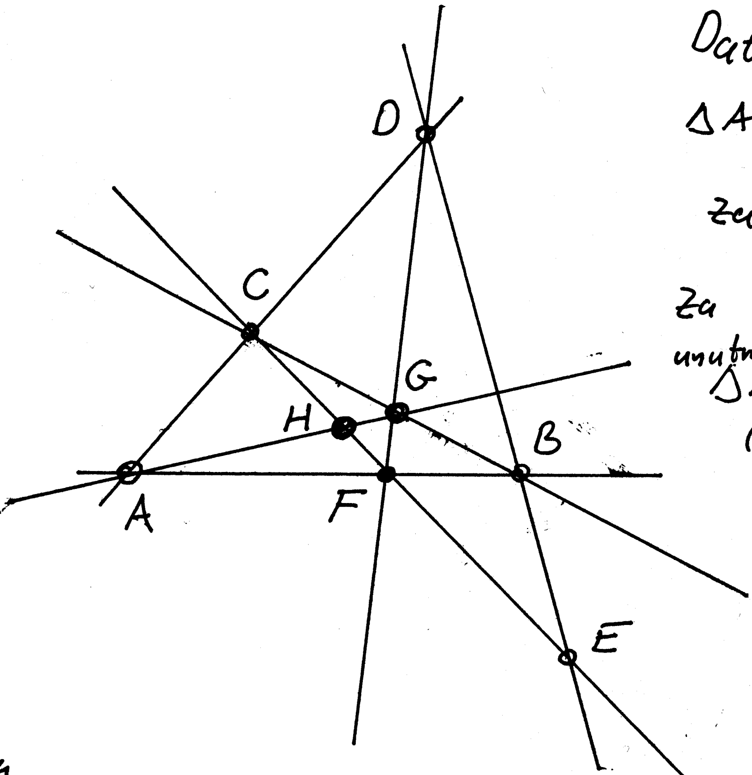
q.e.d.

(#) Isključivo aksiomama incidencije i poretka pokazati da je unutrašnjost trougla neprazan skup.

Rj.

postavka zadatka

$\triangle ABC \Rightarrow \exists$ tačka H takva da $H \in$ unutrašnjosti $\triangle ABC$



Date su tačke A, B i C tj. $\triangle ABC$.

za A i C prema II_2 $\exists D: A-C-D$

za D i B prema II_2 $\exists E: D-B-E$

unutrašnjost $\triangle ABC$ je konveksna figura (dobijena kao presjek tri poluravni)

$\left.\begin{array}{l} A, B, D \text{ nekolinearne tačke} \\ p(C,E) \text{ nije incidentna ni sa jednom od tih tački} \\ \exists C \in p(C,D) \text{ takva da } A-C-D \end{array}\right\} \xRightarrow{II_4}$

$\xRightarrow{II_4} \exists F \in p(C,E): A-F-B \vee B-F-D$.

Prava $p(E,C)$ ne sijeće pravu $p(B,D)$ između tački B i D zato što tu pravu ona sijeće u tački E (zato što je $D-B-E$). Prema tome $A-F-B$.

$\left.\begin{array}{l} A, B, C \text{ nekolinearne tačke} \\ p(F,D) \text{ nije incidentna ni sa jednom od tački } A, B, C \\ \exists F \in p(F,D) \text{ taka } A-F-B \end{array}\right\} \xRightarrow[(A-C-D)]{II_4} \exists G \in p(F,D): C-G-B$

$\left.\begin{array}{l} C, F, B \text{ nekolinearne tačke} \\ p(A,G) \text{ nije incidentna ni sa jednom od tački } C, F \text{ i } B \\ \exists G \in p(A,G) \text{ tako } C-G-B \end{array}\right\} \xRightarrow[(A-F-B)]{II_4} \exists H \in p(A,G): A-H-G$

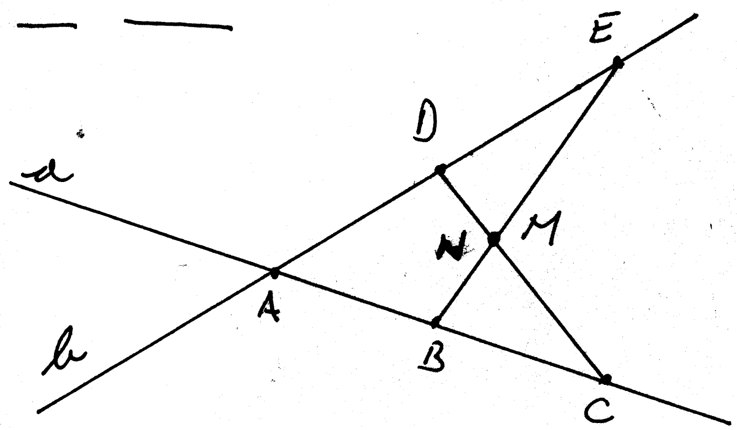
A vrh trougla, $G \in BC$ i $A-H-G \xRightarrow{\triangle ABC \text{ je konveksan}} H \in$ unutr. $\triangle ABC$

q.e.d.

(#) Neka se prave a i b sijeku u tački A i neka je $A-B-C$ na pravoj a, i $A-D-E$ na pravoj b. Isključivo aksiomama incidencije i poretka dokazati da se duž BE mora sijeći sa duži CD u tački M.

Rj. postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} a, b \text{ prave} \\ a \cap b = \{A\} \\ B, C \in a \quad A-B-C \\ D, E \in b \quad A-D-E \end{array}\right\} \Longrightarrow BE \cap CD = \{M\}.$$



$$\left.\begin{array}{l} A, C, D \text{ nekolinearne tačke} \\ p(B,E) \text{ nije incidentna ni sa jednom od tački } A, C, D \\ \exists \text{ tačka } B \in p(B,E) \text{ takva da } A-B-C \end{array}\right\} \overset{II_4}{\Longrightarrow}$$

$\overset{II_4}{\Longrightarrow}$ $\exists M \in p(B,E)$ taka da ili $A-M-D$ ili $C-M-D$

Prava $p(B,E)$ ne sijeće pravu $p(A,D)$ između tački A i D zato što tu pravu ona sječe u tački E ($A-D-E$).
Prema tome mora biti $C-M-D$. ($p(B,E) \cap CD = \{M\}$ ...(*))

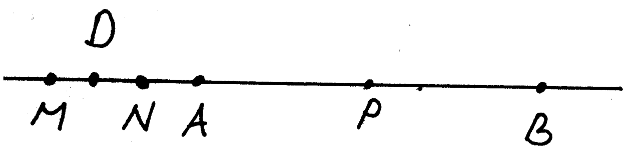
$$\left.\begin{array}{l} A, B, E \text{ nekolinearne tačke} \\ p(C,D) \text{ nije incidentna ni sa jednom od tački } A, B, E \\ \exists \text{ tačka } D \in p(C,D) \text{ takva da je } A-D-E \end{array}\right\} \overset{II_4}{\Longrightarrow} \exists N \in p(C,D) \text{ taka da ili } A-N-B \text{ ili } B-N-E$$

Prava $p(C,D)$ ne sijeće pravu $p(A,B)$ između tački A i B zato što ona tu pravu siječe u tački C (zato što je $A-B-C$).
Prema tome mora biti $B-N-E$. ($p(C,D) \cap BE = \{N\}$ ...(**))
Iz (*) vidimo da $p(B,E) \cap p(C,D) = \{M\}$ a iz (**) vidimo da $p(B,E) \cap p(C,D) = \{N\} \Longrightarrow M \equiv N$.
Sad iz (*) i (**) $\Longrightarrow BE \cap CD = \{M\}$

q.e.d.

(#) Dokazati da svaka tačka prave dijeli tu pravu na dvije konveksne figure (poluprave).

Rj. Neka je data prava p i proizvoljna tačka $P \in p$.



Neka su $A, B \in p$ takve da je poredak $A-P-B$.
Dokažimo da su $pp[P,A)$ i $pp[P,B)$ konveksne figure.

Neka su M i N dvije proizvoljne tačke koje pripadaju $pp[P,A)$. Da bi dokazali da je $pp[P,A)$ konveksna figura potrebno je i dovoljno da pokažemo da je $MN \subseteq pp[P,A)$.

Neka je D proizvoljna tačka duži MN.

Kako je
$$\left.\begin{array}{l} M-P-B \\ N-P-B \\ M-D-N \end{array}\right\} \Rightarrow D-P-B$$
tj. D pripada $pp[P,A)$

Kako je D proizvoljna tačka na MN to
$$MN \subseteq pp[P,A)$$
$\Rightarrow$ $pp[P,A)$ je konveksna figura

q.e.d.

Analogno se pokazuje da je $pp[P,B)$ konveksna figura.
Prema tome svaka tačka prave dijeli tu pravu na dvije konveksne figure (poluprave).

q.e.d.

Konveksnost

Figura F je konveksna ako za svake dvije tačke A i B iz F slijedi $\overline{AB} \subseteq F$. Prazan skup ϕ i figura koja se sastoji od samo jedne tačke su konveksne.

Najpoznatije konveksne figure su: prava, poluprava, ravan, poluravan, kružnica, sfera, kocka, paralelogram...

Izlomljena poligonalna linija je unija uzastopnih nadovezanih duži od kojih nijedna od dvije susjedne nadovezane duži ne pripadaju istoj pravoj.

Mnogougao je unija zatvorene poligonalne linije (čije se duži ne sijeku) i njene unutrašnje oblasti.

1. Dokazati da je presjek dvije konveksne figure konveksna figura.

Rj: postavka zadatka

$$F_1 \text{ i } F_2 \text{ konveksne fig.} \Rightarrow F_1 \cap F_2 \text{ konveksna fig.}$$

Drugim riječima, želimo pokazati da za

$$\forall A, B \in F_1 \cap F_2 \Rightarrow AB \subseteq F_1 \cap F_2$$

$$A, B \in F_1 \cap F_2 \Rightarrow A, B \in F_1 \text{ i } A, B \in F_2$$

Kako su F_1 i F_2 konveksne figure to

$$\left.\begin{array}{l} A, B \in F_1 \Rightarrow AB \in F_1 \\ A, B \in F_2 \Rightarrow AB \in F_2 \end{array}\right\} \Rightarrow AB \in F_1 \cap F_2$$

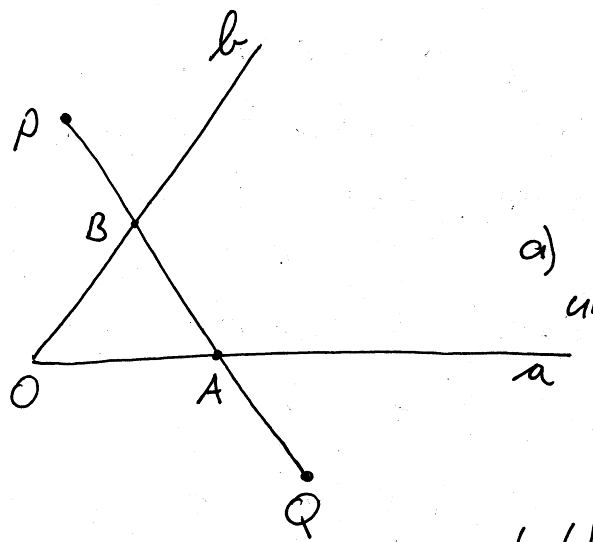
Prema tome, presjek dvije konveksne figure je konv. fig.

q.e.d.

2. Dokazati da je unutrašnja oblast ugla, različitog od ravnog, konveksan skup, dok je spoljašnja oblast tog ugla, nekonveksan skup.

Rj. postavka zadatka

$\measuredangle aOb \neq$ ravnog ugla $\Rightarrow$ unutr. obl. $\measuredangle aOb$ konv. sk.
vanjsk. obl. $\measuredangle aOb$ nekonv. sk.



Neka je dat $\measuredangle aOb$.
Uzmimo proizvoljne tačke $A \in a$ i $B \in b$

a) unut. obl. $\measuredangle aOb = pr[a, B) \cap pr[b, A)$

Kako je poluravan konveksan skup a prema prethodnom zadatku presjek dvije konveksne figure je konveksna figura, slijedi unutr. obl. $\measuredangle aOb$ konv. sk.

q.e.d.

b) za tačke $A, B \overset{II_2}{\Rightarrow} \exists P: A-B-P$

za $B, A \overset{II_2}{\Rightarrow} \exists Q: B-A-Q$

Iz $A-B-P$ i $B \in b$ zaključujemo da tačke A i P leže sa različite strane prave b.

Kako $pr[b, A) \supseteq$ unutr. obl. $\measuredangle aOb \Rightarrow P \in$ vanj. obl. $\measuredangle aOb$

Iz $B-A-Q$ i $A \in a$ zaključujemo da tačke B i Q leže sa različite strane prave a.

Kako $pr[a, B) \supseteq$ unutr. obl. $\measuredangle aOb \Rightarrow Q \in$ vanj. obl. $\measuredangle aOb$

$$\left.\begin{array}{l} P, Q \in \text{spoljaš. obl. } \measuredangle aOb \\ \overline{AB} \subseteq \overline{PQ} \\ \overline{AB} \subseteq \text{unutraš. obl. } \measuredangle aOb \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{PQ} \not\subseteq \text{spoljašnjoj oblasti } \measuredangle aOb$$

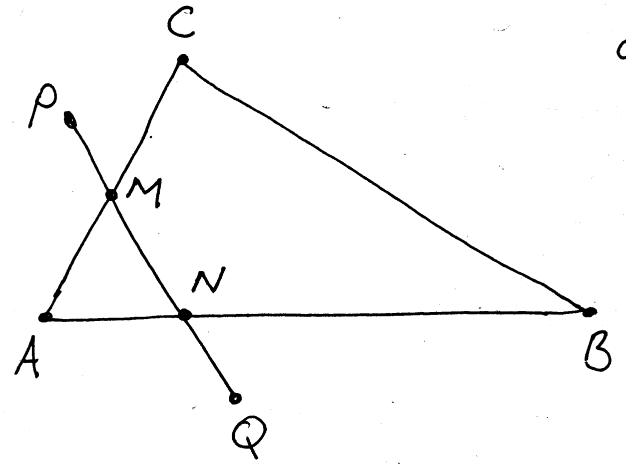
$\Downarrow$

spoljašnja obl. $\measuredangle aOb$ nije konve. sk.

q.e.d.

3. Dokazati da je unutrašnja oblast trougla konveksan skup i da je spoljašnja oblast trougla nekonveksan skup.

Rj. $\triangle ABC \Rightarrow$ unutrašnja oblast $\triangle ABC$ konv. sk.
spolj. obl. $\triangle ABC$ nekonveksan skup



a) Neka je dat $\triangle ABC$. Unutrašnju oblast $\triangle ABC$ možemo tumačiti kao presjek tri poluravni ili kao presjek unutrašnje oblasti dva ugla.

$$\text{unutr. obl. } \triangle ABC = pr[p(A,B), C) \cap pr[p(B,C), A) \cap pr[p(A,C), B)$$

ili

$$\text{unutr. obl. } \triangle ABC = \text{unutr. obl. } \measuredangle ABC \cap \text{unutr. obl. } \measuredangle BAC$$

I u jednom i u drugom slučaju, prema zadatku 2.

$\Rightarrow$ unutr. obl. $\triangle ABC$ konv. sk.

q.e.d.

b) za tačke A, B prema zadatku 1. $\exists N: A-N-B$

za tačke A, C $\exists M: A-M-C$

za tačke N, M $\xRightarrow{II_2}$ $\exists P: N-M-P$

za M, N $\xRightarrow{II_2}$ $\exists Q: M-N-Q$

Analognim zaključivanjem kao u prethodnom zadatku dobićemo

$$\left.\begin{array}{l} P, Q \in \text{spolj. obl. } \triangle ABC \\ \overline{MN} \subseteq \overline{PQ} \\ \overline{MN} \subseteq \text{unutr. obl. } \triangle ABC \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{PQ} \not\subseteq \text{spolj. obl. } \triangle ABC$$

$\Downarrow$

spoljašnja obl. $\triangle ABC$ nekonv. sk.

q.e.d.

4. Dokazati da je mnogougao konveksan ako i samo ako se svi vrhovi mnogougla nalaze u istoj poluravni određenoj pravom koja sadrži ma koju stranicu tog mnogougla.

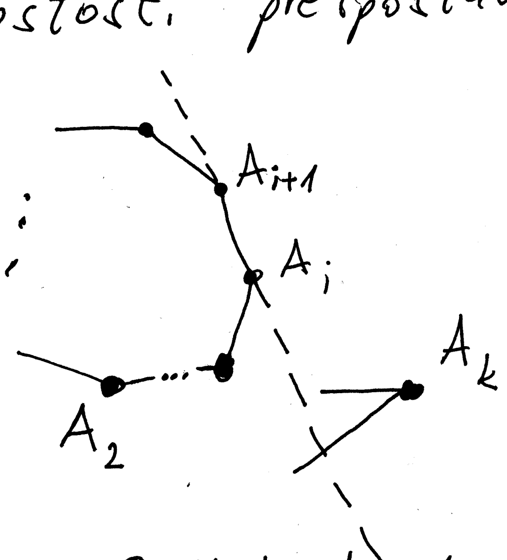
Rj. postavka zadatka:

mnogougao konveksan $\Leftrightarrow$ svi vrhovi mnogougla se nalaze u istoj poluravni određenoj pravom koja sadrži ma koju stranicu tog mnogougla

potreban uslov

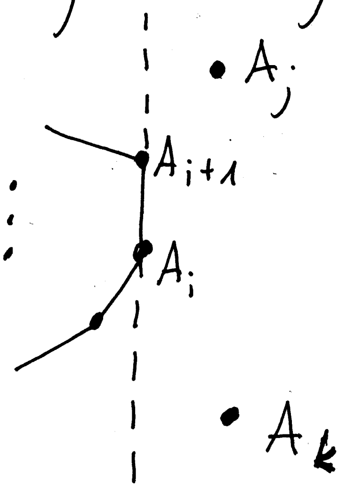
„$\Leftarrow$": mnogougao konveksan $\Rightarrow \forall$ svi vrh. mn. se nal. u ist. pol. odr. pr. koj. sadr. ma koju str. tog mn.

Neka je dat mnogougao $A_1A_2\ldots A_n$ ($n \geq 6$). Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da postoji bar jedan vrh A_k (k fiksirano) koji se ne nalazi u istoj poluravni (određenoj pravom $p(A_i, A_{i+1})$ (i fiksirano) koja sadrži stranicu A_iA_{i+1} tog mnogougla) u kojoj se nalaze svi ostali vrhovi mnogougla. Bez ograničenja opštosti pretpostavimo da je $k<i<i+1\neq n$. Neka je A_k jedini vrh koji nije u istoj poluravni u kojoj su svi ostali vrhovi. Tada je A_kA_{i+1} stranica mnogougla ($i+1\neq n$). # kontradikcija (A_k i A_{i+1} nisu susedni vrhovi pa duž A_kA_{i+1} može biti samo dijagonala mnogougla).



Pitanje? Kako bi došli do kontradikcije da su A_k i A_{i+1} susedni vrhovi (što je moguće u slučaju $A_1=A_k$ i $A_n=A_{i+1}$).

Pretpostavimo da pored vrha A_k postoji još jedan vrh (ili više njih) koji nije u istoj poluravni u kojoj su svi ostali vrhovi mnogougla. Neka je A_j (j fiksirano) prvi vrh sa iste strane prave $p(A_i, A_{i+1})$ sa koje je vrh A_k tako da je $i+1<j$. Tada su mogući sljedeći slučajevi:



1° A_kA_j stranica mnogougla #kontradikcija

2° A_kA_j siječe neku od stranica mnogougla #kontradikcija (mnogougao konveksan)

3° A_kA_j dijagonala mnogougla $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ A_iA_{i+1} dijagonala mnogougla #kontradikcija

Pitanje? Kako bi došli do kontradikcije da ne postoji vrh A_j sa navedenim osobinama.

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome svi vrhovi mnogougla se nalaze u istoj poluravni određenoj pravom koja sadrži ma koju stranicu tog mnogougla.

q.e.d.

---

dovoljan uslov „$\Rightarrow$": vrhovi mnogougla se nalaze u istoj poluravni određenoj pravom koja sadrži ma koju stranicu tog mnogougla $\Rightarrow$ mnogougao konveksan

---

Posmatrajmo presjek svih poluravni čije ivice sadrže jednu stranicu mnogougla. Ovaj presjek sadrži sve vrhove mnogougla (svaka poluravan sadrži sve vrhove) i jednaka je unutrašnjoj oblasti mnogougla. Kako je poluravan konveksan skup to je i presjek svih poluravni konveksan skup

$\Rightarrow$ mnogougao je konveksan skup

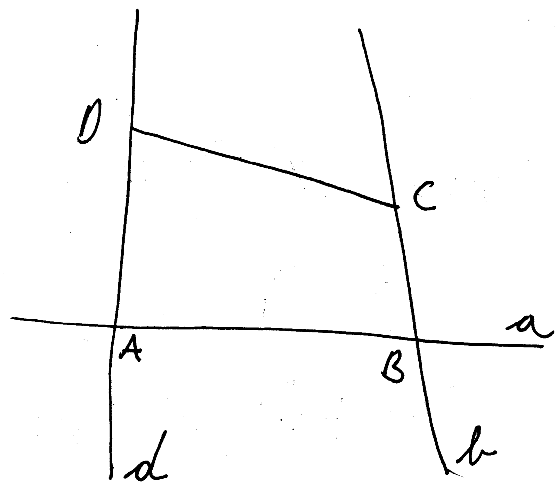
q.e.d.

5. Četverougao je konveksan ako i samo ako mu se dijagonale sijeku.

Rj. potreban uslov

„ $\Rightarrow$ ": četverougao konveksan $\Rightarrow$ dijagonale mu se sijeku

Neka je dat konveksan četverougao $\square ABCD$.



Uvedimo oznake

$a = p(A,B)$; $b = p(B,C)$;

$d = p(A,D)$.

Iz prethodnog zadatka znamo da svi vrhovi četverougla se nalaze u istoj poluravni određenu pravom koja sadrži ma koju stranicu četverougla.

$$\measuredangle BAD = pr[a, C) \cap pr[d, C)$$

$$\Downarrow$$

$$C \in \text{unutr. } \measuredangle BAD \xRightarrow{\text{prema zadatku } 7.} p(A,C) \cap BD \neq \emptyset$$

$$\measuredangle ABC = pr[a, D) \cap pr[b, D)$$

$$\Downarrow$$

$$D \in \text{unutr. } \measuredangle ABC \xRightarrow{\text{prema zadatku } 7.} p(B,D) \cap AC \neq \emptyset$$

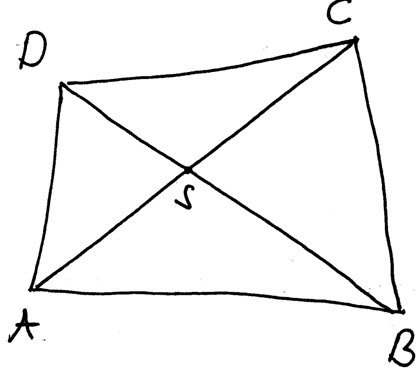
$$\left.\begin{array}{l} p(A,C) \cap BD \neq \emptyset \\ p(B,D) \cap AC \neq \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow AC \cap BD \neq \emptyset \Rightarrow \text{dijagonale se sijeku}$$

q.e.d.

dovoljan uslov

„ $\Leftarrow$ ": dijagonale četverougla se sijeku $\Rightarrow$ četver. konveks.

Neka je dat četverougao $\square ABCD$ takav da $AC \cap BD \neq \emptyset$.



Dokazaću da se svi vrhovi četvorougla nalaze u istoj poluravni određenu pravom koja sadrži ma koju stranicu četvorougla.

$AC \cap BD = \{S\}$: $A-S-C \wedge B-S-D$

Posmatrajmo poluravan $pr[p(A,B), S)$

$$\left.\begin{array}{c} pr[p(A,B), S) \\ A \in p(A,B) \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{iz Aksioma poretka}]{\text{prema zadatku } 5.} pp[A,S) \subseteq pr[p(A,B), S)$$

$$\Downarrow \text{ kako je } A-S-C$$

$$C \in pr[p(A,B), S)$$

$$\left.\begin{array}{c} pr[p(A,B), S) \\ B \in p(A,B) \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{iz Aksioma poretka}]{\text{prema zadatku } 5.} pp[B,S) \subseteq pr[p(A,B), S)$$

$$\Downarrow \text{ kako je } B-S-D$$

$$D \in pr[p(A,B), S)$$

Time smo pokazali da tačke C i D leže u istoj poluravni čija je ivica prava koja sadrži stranicu AB četvorougla.

Ponavljajući sličan postupak dobijamo:

$$A, D \in pr[p(B,C), S)$$

$$A, B \in pr[p(C,D), S)$$

$$B, C \in pr[p(A,D), S) .$$

$\Rightarrow$ $\square ABCD$ ispunjava uslove 4 zadatka

$\Rightarrow$ $\square ABCD$ je konveksan

q.e.d.

⑥ Dokazati da je četverougao konveksan ako i samo ako svaka duž MN pri čemu $M \in AB$, $N \in CD$ siječe njegove dijagonale.

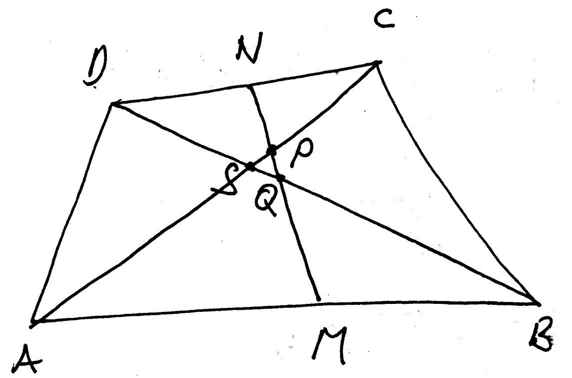
Rj.

potreban uslov

„$\Rightarrow$": četv. $\square ABCD$ konveksan $\Rightarrow \forall M \in \overline{AB} \wedge \forall N \in \overline{CD}$

$(\overline{MN} \cap \overline{AC} \neq \emptyset \wedge \overline{MN} \cap \overline{BD} \neq \emptyset)$

AC i BD dijagonale četverougla



Nacrtajmo sliku.

$\square ABCD$ konv. $\Rightarrow AC \cap BD = \{S\}$:

$A - S - C$ i $B - S - D$

$M \in \overline{AB} \Rightarrow A - M - B$

$N \in \overline{CD} \Rightarrow C - N - D$

Kako je poredak $A-M-B$ i $C-N-D$ tačke C i D i tačke A i B leže sa različitih strana prave $p(M,N)$.

Pa moguća su dva slučaja:

1° A i C leže u jednoj a B i D u drugoj poluravni sa ivicom u $p(M,N)$

2° A i D leže u jednoj a B i C u drugoj poluravni sa ivicom u $p(M,N)$

Ako bi bio 1° $\Rightarrow AC \cap BD = \emptyset$ # kontradikcija $(AC \cap BD = \{S\})$

Ne može nastupiti 1°

Važi 2°: A i D leže u jednoj a B i C u drugoj poluravni pa $\overline{AC} \cap p(M,N) \neq \emptyset$

i $\overline{BD} \cap p(M,N) \neq \emptyset$.

Ove dvije činjenice ćemo iskoristiti kasnije.

Iz poretka $A-S-C$ i $B-S-D$ zaključujemo da tačke B i D leže sa različitih strana $p(A,C)$

$$\left.\begin{array}{c} pr[p(A,C),D) \\ C\in p(A,C) \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{poretka}]{\substack{\text{prema zadatku} \\ \text{5. iz Aksioma}}} pp[C,D) \subseteq pr[p(A,C),D)$$

$$\Downarrow \text{ kako je poredak } C-N-D$$

$$N\in pr[p(A,C),D)$$

$$\left.\begin{array}{c} pr[p(A,C),B) \\ A\in p(A,C) \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{poretka}]{\substack{\text{prema zadatku} \\ \text{5. iz Aksioma}}} pp[A,B) \subseteq pr[p(A,C),B)$$

$$\Downarrow \text{ kako je poredak } A-M-B$$

$$M\in pr[p(A,C),B)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{poluravni } pr[p(A,C),B) \text{ i} \\ \quad pr[p(A,C),D) \text{ su dvije} \\ \quad \text{različite poluravni sa} \\ \quad \text{istom ivicom} \\ N\in pr[p(A,C),D) \\ M\in pr[p(A,C),B) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} M \text{ i } N \text{ leže sa} \\ \text{različitih strana} \\ \text{prave } p(A,C) \text{ tj.} \\ p(A,C)\cap \overline{MN} \neq \emptyset \end{array}$$

Dobio sam

$$\left.\begin{array}{c} p(M,N)\cap \overline{AC} \neq \emptyset \\ p(A,C)\cap \overline{MN} \neq \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{AC}\cap\overline{MN} \neq \emptyset$$

Na isti način ću pokazati da je $\overline{MN}\cap\overline{BD}\neq\emptyset$.

Iz poretka $A-S-C$ i $B-S-D$ zaključujemo da tačke A i C leže sa različitih strana $p(B,D)$.

Prema zadatku 5. iz Aksioma poretka $pp[B,A)$ i pp $[D,B)$ leže u različitim poluravnima sa ivicom $p(B,D)$ i kako je $M \in pp[B,A)$ i $N \in pp[D,B)$ to tačke M i N leže sa različite strane prave $p(B,D)$

$$\Rightarrow p(B,D) \cap \overline{MN} \neq \emptyset$$

Dobili smo

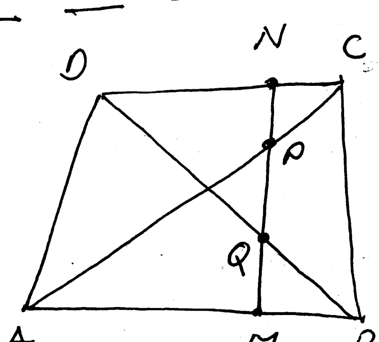
$$\left.\begin{array}{l} p(M,N) \cap \overline{BD} \neq \emptyset \\ p(B,D) \cap \overline{MN} \neq \emptyset \end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{MN} \cap \overline{BD} \neq \emptyset$$

Prema tome: $\overline{AC} \cap \overline{MN} \neq 0$ i $\overline{MN} \cap \overline{BD} \neq \emptyset$

q. e. d.

dovoljan uslov

$\Leftarrow$ " : svaka duž $\overline{MN}$ pri čemu je $M \in \overline{AB}$ i $N \in \overline{CD}$ siječe dijagonale $\square ABCD$ $\Longrightarrow$ $\square ABCD$ konveksan



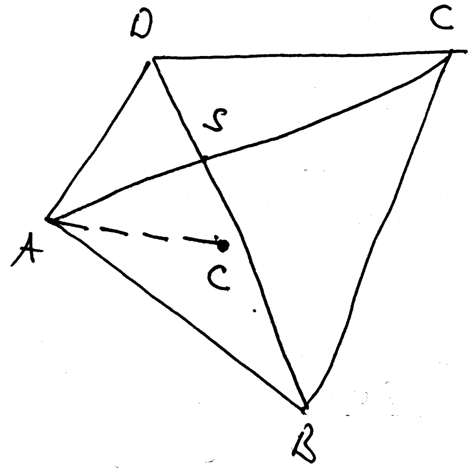
Dovoljan uslov ostavljamo studentu za vježbu.
Ideja je u tome da posmatramo četri poluravni koje su određene pravama koje sadrže redom $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{AD}$ stranice četverougla.
Iz poznatog poretka ćemo zaključiti da se vrhovi mnogougla nalaze u tim poluravnima pa prema zadatku 4. $\Longrightarrow$ $\square ABCD$ konveksan

q. e. d.

7. Dokazati da je četverougao konveksan ako i samo ako svaki vrh četverougla leži u spoljašnjoj oblasti trougla kojeg obrazuju ostala tri vrha četverougla.

Rj. potreban uslov

" ⟹ ": četverougao konveksan ⟹ svaki vrh četverougla leži u spoljašnjoj oblasti trougla kojeg obrazuju ostala tri vrha četverougla



□ ABCD konveksan

$\Downarrow$

$AC \wedge BD = \{S\}$

Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da postoji vrh četver. koji leži u unutrašnjosti trougla kojeg obrazuju ostala tri vrha i neka je to vrh C.

$C \in$ unutr. $\triangle ABD \implies AC \wedge BD = \emptyset$

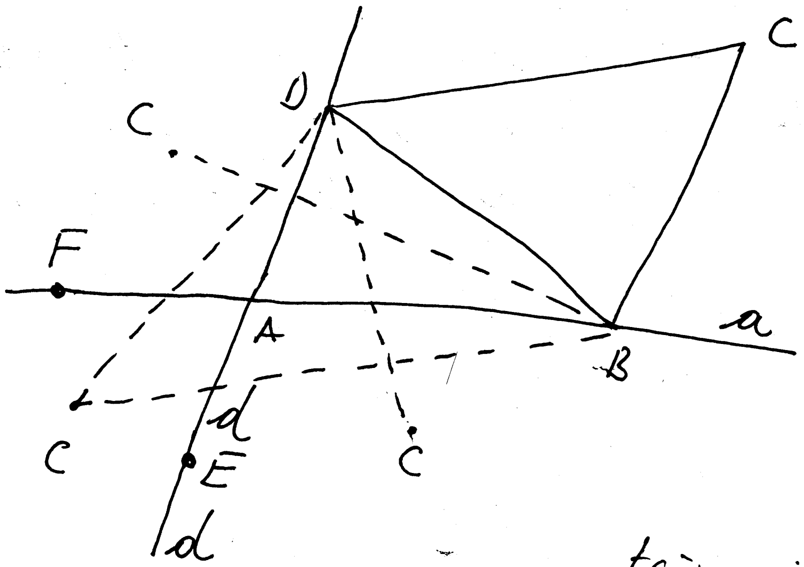
kontradikcija
$(AC \wedge BD \neq \emptyset)$

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas je dovela u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome:
svaki vrh četver. leži u spolj. obl. tr. kojeg obr. ost. tri vrha četverougla. q. e. d.

dovoljan uslov

" ⟸ ": svaki vrh četverougla leži u spoljašnjoj oblasti △ kojeg obrazuju ostala tri vrha četverougla ⟹ četverougao konveksan

Pretpostavimo suprotno tvrdnji, tj. pretpostavimo da dati četverougao □ ABCD nije konveksan.
To znači da mu se dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ ne sijeku



Uvedimo oznake

$a = p(A;B)$; $d = p(A,D)$

$E: D-A-E$; $F: B-A-F$

Kako tačka C leži u spoljašnjoj oblasti $\triangle ABD$ moguć je tačno jedan od sljedeća tri slučaja:

1° $C \in pr[a, E) \cap pr[d, B)$

2° $C \in pr[a, E) \cap pr[d, F)$

3° $C \in pr[a, D) \cap pr[d, F)$

Pitanje: Zašto ne razmatramo slučaj

$C \in pr[a, D) \cap pr[d, B)$?

Da ne vrijede 2° i 3° slučaj ostavljamo za vježbu.
Pokazaćemo da ne vrijedi 1°.
Ako bi bilo $C \in pr[a, E) \cap pr[d, B)$, kako C leži u spoljšnjoj oblasti $\triangle ABD \Rightarrow AB \cap CD \neq \emptyset$
\# kontradikcija
(stranice u četverouglu se ne sijeku)

Prema tome nije 1°, 2° i 3°.
Pretpostavka da četverougao $\square ABCD$ nije konveksan nas dovodi u kontradikciju pa ta tvrdnja nije tačna.

Četverougao $\square ABCD$ jest konveksan

q.e.d.

8. Date su četri konveksne figure u ravni takve da svake tri od njih imaju jednu zajednička tačka. Dokazati da sve četri date figure imaju zajednička tačka.

Rj. postavka zadatka u obliku implikacije

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \text{ ravan} \\ F_1, F_2, F_3, F_4 \text{ konveksne figure} \\ F_1, F_2, F_3, F_4 \subseteq \alpha \\ \exists A: A \in F_1 \cap F_2 \cap F_3 \;;\; \exists B: B \in F_1 \cap F_2 \cap F_4 \\ \exists C: C \in F_1 \cap F_3 \cap F_4 \;;\; \exists D: D \in F_2 \cap F_3 \cap F_4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \exists E: \\ E \in F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4 \end{array}$$

F_1, F_2, F_3 i F_4 konveksne figure

$A \in F_1 \cap F_2 \cap F_3 \Rightarrow A \in F_1 \wedge \underline{A \in F_2} \wedge \underline{\underline{A \in F_3}}$

$B \in F_1 \cap F_2 \cap F_4 \Rightarrow B \in F_1 \wedge \underline{B \in F_2} \wedge B \in F_4$

$C \in F_1 \cap F_3 \cap F_4 \Rightarrow C \in F_1 \wedge \underline{\underline{C \in F_3}} \wedge C \in F_4$

$D \in F_2 \cap F_3 \cap F_4 \Rightarrow \underline{D \in F_2} \wedge \underline{\underline{D \in F_3}} \wedge D \in F_4$

F_1 konv. fig., $A \in F_1$, $B \in F_1$, $C \in F_1 \Rightarrow \triangle ABC \subseteq F_1$

F_2 konv. fig., $A \in F_2$, $B \in F_2$, $D \in F_2 \Rightarrow \triangle ABD \subseteq F_2$

F_3 konv. fig., $A \in F_3$, $C \in F_3$, $D \in F_3 \Rightarrow \triangle ACD \subseteq F_3$

F_4 konv. fig., $B \in F_4$, $C \in F_4$, $D \in F_4 \Rightarrow \triangle BCD \subseteq F_4$

Razmotrimo sve moguće slučajeve:

1° Neke od dvije tačke A, B, C, D se poklapaju

2° Sve četri tačke A, B, C, D su različite

a) među tačkama postoje tri kolinearne
b) među tačkama A, B, C, D ne postoje tri kolinearne
I jedna od njih leži u unutrašnjosti trougla koje obrazuju ostale tri tačke
II svaka tačka leži u spoljašnjoj oblasti trougla kojeg obrazuju ostale tri tačke.

Za slučaj $1°$:
Neka se poklapaju tačke npr. A i D tj. $A \equiv D$. Tada:

$A \in F_1$, $A \in F_2$, $A \in F_3$, $A \equiv D \in F_4 \Rightarrow A \in F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4$

q.e.d.

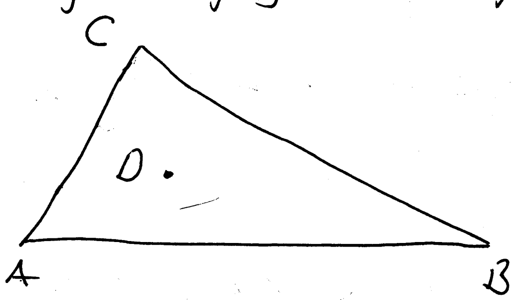
Za slučaj $2°$ a):
Neka su npr. kolinearne tačke A, B i C čiji je poredak $A-B-C$.

$\overline{AC} \subseteq F_1$, $\overline{AC} \subseteq F_3$, $A-B-C \Rightarrow B \in AC \subseteq F_1 \cap F_3$

$B \in F_2$, $B \in F_4$, $B \in F_3 \cap F_1 \Rightarrow B \in F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4$

q.e.d.

Za slučaj $2°$ b) I:
Pretpostavimo npr. da tačka D leži u unutrašnjosti trougla kojeg obrazuju tačke A, B, C.



$\Delta ABC \subseteq F_1$ i $D \in$ unutr. ΔABC

$\Rightarrow D \in F_1$

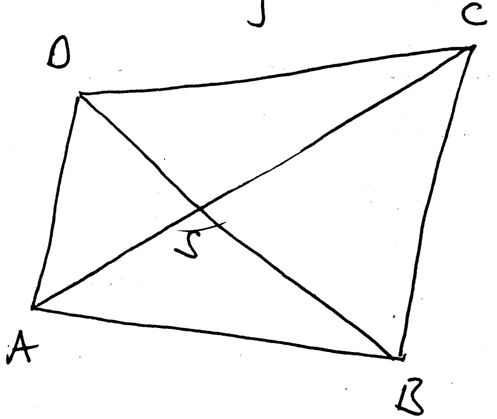
$D \in F_1$, $D \in F_2$, $D \in F_3$, $D \in F_4 \Rightarrow$

$D \in F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4$

q.e.d.

Za slučaj $2°$ b) II:
Svaka tačka leži u spoljašnjoj oblasti trougla kojeg obrazuju ostale tri tačke. Iz ove činjenice prema

prethodnom zadatku tačke A, B, C i D su tjemena konveksnog četverougla.



$\square ABCD$ konveksan

$$\Downarrow$$

$$\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{S\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AC} \subseteq F_1, \quad \overline{AC} \subseteq F_3 \Rightarrow \overline{AC} \subseteq F_1 \cap F_3 \\ \overline{BD} \subseteq F_2, \quad \overline{BD} \subseteq F_4 \Rightarrow \overline{BD} \subseteq F_2 \cap F_4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{AC} \cap \overline{BD} \subseteq F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4$$

$$\Downarrow$$

$$S \in F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4$$

q.e.d.

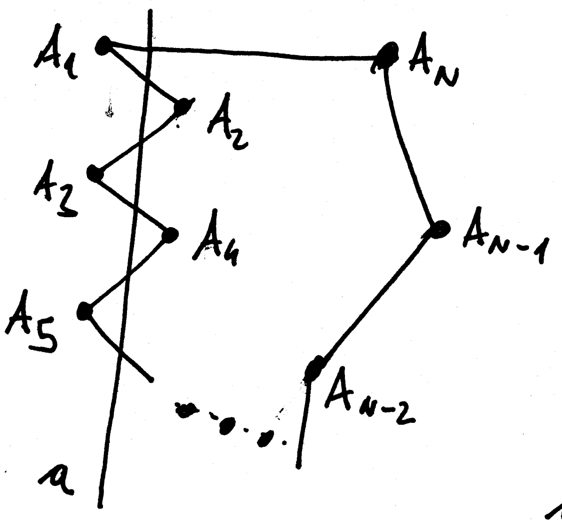
U svim mogućim slučajevima date figure imaju zajedničku tačku

q.e.d.

Dokazati da prava ne može sijeći sve stranice mnogougla sa neparnim brojem stranica.

Rj. Neka je dat mnogougao $A_1A_2A_3\dots A_N$ (koji ima neparan broj stranica, time i neparan broj vrhova).
N - neparan broj.

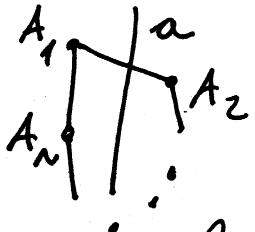
Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da postoji prava koja siječe sve stranice ovog mnogougla.



Posmatramo $\triangle A_1A_2A_3$. Kako prava a siječe stranicu A_1A_2 i stranicu A_2A_3 to su tačke A_1 i A_3 sa iste strane prave sa koje nije tačka A_2.

Posmatramo $\triangle A_2A_3A_4$. Kako prava a siječe stranice A_2A_3 i A_3A_4 to su A_2 i A_4 sa iste strane prave a sa koje nije tačka A_3. Nastavljajući ovaj proces dolazimo do zaključka da su vrhovi $A_1, A_3, A_5, \dots, A_{N-2}, A_N$ sa jedne strane prave dok su vrhovi $A_2, A_4, \dots, A_{N-1}$ sa druge strane prave a.

Sad ako posmatramo $\triangle A_1A_2A_N$ imamo da su A_1 i A_N sa iste strane prave a sa koje nije tačka A_2,



tj. dobijamo da prava a ne siječe stranicu A_1A_N.

#kontradikcija

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome: prava ne može sijeći sve stranice mnogougla sa neparnim brojem stranica.